CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MATEMATICA, DE DRAG“
EDIŢIA I, 24-26.11.2006

Clasa a V-a

1. Numerele $a, b, c, d \in N$ verifică relaţia: $2^{a+b} + 2^{b+c} + 2^{c+d} + 2^{d+a} = 25$.
Calculaţi: $a + b + c + d$.

(G. M. 1/2006)

2. Suma a două numere naturale este 254. Unul dintre numere conţine cifra 1 pe care dacă o ştergem obţinem celălalt număr. Aflaţi cele două numere.

(Valer Pop)

3. Să se calculeze suma şi produsul numerelor naturale *x, y* şi *z* ştiind că sumele de câte două dintre ele formează mulţimea $\{a,\ 2a\}$, unde a este număr natural impar.

(Ion Bogdan)

Clasa a VI-a

1. Să se calculeze suma tuturor numerelor $\overline{abba}$, ştiind că $\overline{ab} - \overline{ba} = 3a + 3b$.

(G. M. 2/2006)

2. Sandu a început să citească o carte de 110 pagini marţi şi a terminat-o într-o vineri. În fiecare zi a citit exact câte o pagină mai mult decât în ziua precedentă. Să se precizeze în ce zi a citit un număr de pagini divizibile cu 11.

(Dan Brânzei)

3. Fie (*OC* şi (*OD* două semidrepte situate în interiorul unghiului *AOB*, astfel încât (*OD* este inclusă în Int($\sphericalangle AOC$). Aflați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$, ştiind că m($\sphericalangle AOD$) = 50° și m($\sphericalangle BOC$) = 40°.

Clasa a VII-a

1. Să se determine cel mai mare divizor comun al tuturor numerelor naturale de forma $(a+b)(b+c)(c+a)$, unde $a, b, c \in Z$ şi $5a + 2b = 3c$.

(Dumitru Barac)

2. Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ cu proprietatea

$$a + b^2 + c^3 + d^4 = \sqrt{\overline{abcd}}\ .$$

(G. M. 3/2006)

3. Dacă un trapez isoscel are un unghi de 30^o şi lungimea bazei mici egală cu a şaptea parte din lungimea bazei mari, atunci trapezul poate fi descompus în opt triunghiuri congruente. ***(Ioan Bogdan)***

Clasa a VIII-a

1. Aflaţi $a, b \in N$ care verifică relaţia: $a(a+7) = b(b+3)$. ***(G. M. 10/2003)***

2. Determinaţi numerele reale *m* şi *n* ştiind că:

$$|mx + ny - m - n| + |my + nx - m - n| = |x-1| + |y-1|, \ (\forall) x, y \in R.$$

(Artur Bălăucă)

3. În paralelipipedul dreptunghic *ABCDA'B'C'D'* notăm cu *M, N, P* proiecţiile punctelor *A, C* şi, respectiv, *B'* pe [BD'].

Să se arate că: $\frac{D'M}{BM} + \frac{D'N}{BN} + \frac{D'P}{BP} \geq 6$.

Clasa a IX-a

1. Să se rezolve în R ecuaţia: $16\{x\}^2 - 8x + 1 = 0$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real *x*. ***(G.M. 9/2006)***

2. În triunghiul *ABC*, cevienele *AP, BQ, CR* sunt concurente în *F*. Să se arate echivalenţă afirmaţiilor:

a) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = \vec{0}$;

b) *F* este centrul de greutate al triunghiului *ABC*. ***(Doru Isac)***

3. Să se arate că dacă punctul *M* este aşezat în interiorul pătratului *ABCD* cu latura 1, atunci dintre distanţele *MA, MB, MC, MD*:

a) cel mult una este mai mare decât $\frac{\sqrt{5}}{2}$;

b) cel mult două sunt mai mari decât 1;

c) cel mult trei sunt mai mari decât $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ***(G. M. 6/1959)***

Clasa a X-a

1. Fie tetraedrul *ABCD*.

a) Să se arate că există cel puţin un grup de patru plane paralele echidistante care trec fiecare prin câte un vârf al tetraedrului.

b) Câte astfel de grupe există? ***(***)***

2. Fie $a,b,c \in (1,+\infty)$. Arătaţi că: $\log_{a^2b} a + \log_{b^2c} b + \log_{c^2a} c \le 1$.

(25622, G.M. 11/2006)

3. Fie $a,b \in C$ astfel încât: $|a+b| \ge 2$ şi $|a+b| \ge 1+|ab|$. Să se arate că, pentru orice $n \in N$, $|a^{n+1}+b^{n+1}| \ge |a^n+b^n|$.

(Alin Pop)

Clasa a XI-a

1. Pe laturile *BC, CA, AB* ale triunghiului *ABC* de arie *S* se dau punctele *K, L, M*. Să se arate că aria cel puţin a unui triunghi *MAL, KBM, LCK* nu depăşeşte $\frac{S}{4}$.

(G. M. 7767 nr. 8/1968)

2. Să se rezolve în $M_2(C)$ ecuaţia $X^{3n} - 3X^n = A$, unde $A = \begin{pmatrix} -2 & 2007 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(Petru Vlad)

3. Fie $a,b \in R_+$ şi $(a_n)_{n\ge 1}$ o progresie aritmetică de numere naturale, $a_1 \ge 1$.

Calculaţi limitele: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[a_1]{b} + \sqrt[a_2]{b} + \ldots + \sqrt[a_n]{b}}{a_n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[a_1]{a} + \sqrt[a_2]{a} + \ldots + \sqrt[a_n]{a}}{\sqrt[a_1]{b} + \sqrt[a_2]{b} + \ldots + \sqrt[a_n]{b}} \right)^{\frac{a_n}{\ln a_n}}$.

(Dumitru Acu)

Clasa a XII-a

1. Să se determine numărul polinoamelor ireductibile, de grad trei, peste corpul Z_p.

(G.M. 1/2003 şi 1/2004)

2. Calculaţi:

a) $\int \frac{1-x^2-x^6+x^8}{1+x^{10}} dx,\ x \in R;$

b) $\int \frac{x^{n-1}+x^{5n-1}}{1+x^{6n}} dx,\ x \in R,\ n \in N^*.$

(Dumitru Acu)

3. Fie G un grup cu 10 elemente, un element unitate *e* şi elemente $a \ne e \ne b$ din G astfel încât $a^2 = b^2 = e$. Să se arate că grupul G nu este abelian.

(, G.M. 3/2001)***

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

„MATEMATICA, DE DRAG“

EDIŢIA A II-A, 16-18.11.2007

Clasa a V-a

1. Diferenţa a două numere naturale este 5. Aflaţi numerele ştiind că unul dintre ele este cu 17 mai mic decât triplul celuilalt.

(Ioan Duicu, Bistrita)

2. Un bunic are doi nepoți. Vârsta bunicului se exprimă printr-un număr de două cifre, fiecare cifră exprimând vârsta unui nepot. Ce vârstă are fiecare dacă suma celor trei vârste este 84 de ani.

(G.M. nr.6/2007)

3. Aflați cifrele *a, b, c, d, e* știind că în baza de numerație 10 are loc egalitatea: $\overline{abcde3} = 217071 + \overline{3abcde}$.

(Monica Sas)

Clasa a VI-a

1. Determinați numerele de forma $\overline{abcd}$ divizibile cu 5, pentru care $a + d = (b + c)^2$.

(G.M. nr 2/2007)

2. Să se determine numerele prime *a, b, c* astfel încât să aibă loc egalitatea:

$$a \cdot (2a + 1) + 2a \cdot b + 16c = 230.$$

(Simona Florea)

3. Două unghiuri au vârful comun, iar suma măsurilor lor este 180°. Arătați că există două unghiuri, formate cu laturi ale celor două unghiuri, ale căror bisectoare formează un unghi drept.

(Ioan Duicu)

CLASA a VII-a

1. Să se determine toate numerele naturale $n \in \mathrm{N}$ pentru care $4^{2n+1} + 1$ este număr prim.

(G.M.)

2. Fie *a* un număr natural nenul dat. Să se determine *n* natural astfel încât numărul $2^{2a+5} - 23 \cdot 2^{2a} + 2^n$ să fie pătrat perfect.

(Dumitru Acu)

3. Se dă rombul *ABCD* cu m$\angle ABC = 30^\circ$. Să se construiască pătratul *BDEF* astfel încât *C* să fie un punct interior pătratului. Dacă $DC \cap BF = \{H\}$ și $EC \cap BF = \{G\}$, demonstrați că:

a) $\Delta\, CBH$ este isoscel.

b) $[FC]$ este mediană în $\Delta\, EFG$.

c) $\Delta\, CGH$ este isoscel.

(Ioan Duicu)

Clasa a VIII-a

1. Determinați numerele naturale *n* pentru care fracția $\dfrac{2^n + 3^n}{2^{n-2} + 3^{n-2}}$ este număr natural. ***(G.M. nr. 7/2007)***

2. Arătați că dacă $x, y, z \in (0,\infty)$ și $x^3 + y^3 + z^3 = xyz$, atunci

$$(x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 \geq 23.$$

(Valer Pop)

3. Baza mare [*AB*] a trapezului dreptunghic *ABCD* ($AD \perp AB$) este inclusă în planul α. Știind că: $D \notin \alpha$, $DD' \perp \alpha$, $D' \in \alpha$, $CC' \perp \alpha$, $C' \in \alpha$, $m(\widehat{DAD'}) = 60^\circ$ și ΔABC este echilateral cu latura de 8 cm.

a) Demonstrați că $DC \parallel \alpha$ și $ABC'D'$ este trapez dreptunghic.

b) Calculați măsurile unghiurilor dintre dreptele AD și $C'D'$, BC și $C'D'$ și cosinusul unghiurilor dintre dreptele BD și CC', respectiv BC și DD'.

(Ioan Duicu)

Clasa a IX-a

1. Fie *ABCD* un trapez oarecare în care $AB \parallel CD$. Să se arate că:

$$(AC^2 + AB^2 - BC^2)(BD^2 - BC^2 + CD^2) =$$
$$= (AC^2 - AD^2 + CD^2)(BD^2 + AB^2 - AD^2).$$

(G.M. nr. 7/2007)

2. Să se determine *n* numere reale nenegative, $n \geq 2$, cu proprietatea că fiecare dintre acestea este egal cu pătratul sumei celorlalte $(n-1)$.

(Mugur Acu)

3. Fie *a* număr natural nenul dat. Să se rezolve în R ecuația:

$$[ax] + \{(a+1)x\} = a + 1,$$

unde $[t]$ și $\{t\}$ reprezintă partea întreagă și respectiv partea fracționară a numărului real *t*.

(Dumitru Acu)

Clasa a X-a

1. Într-un triunghi ABC se verifică relația: $\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin A}=3.$

Determinați măsurile unghiurile triunghiului.

(G.M. nr.7/2007)

2. Fie k un număr natural nenul dat, $a_1, a_2, ..., a_k$ numere reale diferite de 1 și $b_1, b_2, ..., b_k$ numere reale diferite de 1 și distincte de numerele $a_1, a_2, ..., a_k$. Se consideră șirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ definite prin relațiile de recurență :

$$x_{n+k}=\frac{y_n}{x_n},\ y_{n+k}=\frac{y_n-1}{x_n-1}, x_1=a_1,\ x_2=a_2, ..., \ x_k=a_k,$$

$$y_1=b_1,\ y_2=b_2, ..., \ y_k=b_k.$$

Să se demonstreze ce șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt periodice.

(Dumitru Acu)

3. Arătați că există o singură pereche de numere prime impare p și q așa încât restul împărțirii lui p^2 la q să fie 4 iar restul împărțirii lui q^2 la p să fie 1.

(Ana Maria Acu)

Clasa a XI-a

1. Fie $p,\ q \in N$, $p^2 < q < (p+1)^2$ și $x_n=[(p+\sqrt{q})^n]$, pentru orice $n \in N$ unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui u, $u \in R$. Să se demonstreze că x_n este par dacă și numai dacă n este impar.

(G.M. nr. 8/2005)

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_1 > 0$ si rația $r > 0$. Calculați limitele:

i) $L_1 = \lim\limits_{n->\infty} \frac{1}{n^{2p+2}} \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} (a_i \cdot a_j)^p$;

ii) $L_2 = \lim\limits_{n->\infty} \frac{1}{a_n^{2p+2}} \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} (a_i \cdot a_j)^p$; Unde $p \in N$, $p \neq 0$, este fixat.

(Dumitru Acu)

3. Fie $A, B \in M_3(R)$ astfel încât $AB - BA = A$. Să se arate că $A^3 = O_3$.

(G.M. nr. 12/2005)

Clasa a XII-a

1. Să se determine numărul punctelor de extrem ale funcției: $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$,

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \dots (x-n)^n,$$

unde $n \in \mathrm{N}^*$.

(G.M. nr.2/2005)

2. Fie $(\mathrm{G}, \cdot)$ un grup cu proprietatea că există un endomorfism $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, astfel încât $f(x^n y^{n+1}) = x^{n+1} y^n$, pentru orice $x, y \in \mathrm{G}$, iar $n \in \mathrm{N}^*$, n dat.

Să se arate că:

a) $x^{2n+1} = e$, $(\forall)\, x \in \mathrm{G}$;

b) G este grup abelian.

(G.M. nr.2/2005)

3. Calculați:

i) $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int \frac{2(n+1)x^n(x^{n+1}-a) + nx^{n+1} + 2a^2x + a}{x^{2n+2} - 2ax^{n+1} + a^2x^2 + a^2}\, dx$, $a \in \mathrm{R}_+$, $n \in \mathrm{N}^*$, $x \in \mathrm{R}$;

ii) $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int \frac{a + bx^n}{x + cx^{2n+1}}\, dx$, $a, b, c \in \mathrm{R}_+$, $n \in \mathrm{N}^*$, $x > 0$.

(Nicolae Sanda)

Clasa a V-a

1. Pe nişte bilete sunt scrise numere naturale astfel încât suma şi produsul lor sunt egale cu 12. Aflaţi numărul biletelor. (Găsiţi toate soluţiile posibile).

(G.M.)

2. Organizatorii unei întâlniri cu copii pregătesc pentru aceştia de două ori mai multe portocale decât banane şi dau copiilor sosiţi câte 5 portocale şi 2 banane. Ştiind că au rămas 25 de protocale şi 20 de banane, să se afle numărul copiilor participanţi la întâlnire şi apoi, numărul de portocale şi numărul de banane pregătite pentru copii.

(Nastasia Chiciudean)

3. O grădină de formă dreptunghiulară este împrejmuită cu un gard format din 8 rânduri de sârmă. Ştiind că lungimea totală a sârmei este de 22400 metri, iar lungimea grădinii este cu 16 metri mai mare decât triplul lăţimii, aflaţi:
a) perimetrul grădinii;
b) suprafaţa grădinii.

(Monica Sas)

Clasa a VI-a

1. Se dă fracţia zecimală în baza 10, $x = \overline{0{,}34(abc)}$. Se ştie că:
a) a 2006-a zecimală este 8;
b) a 2007-a zecimală este 5;
c) a 2005-a zecimală este 9.
Aflati x.

(G.M.)

2. Să se determine pătratele numerelor de două cifre, scrise în baza 10, pătrate perfecte care sunt de forma $\overline{a(b-a)b}$, unde a, $b-a$, şi b sunt cifre iar $a \neq b$.

(Monica Sas)

3. Fie şirul de numere raţionale: $\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{1}{2}; \frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}; \frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}$ …. .
Precizaţi poziţia (numărul locului) pe care o ocupă în şir, numărul de forma $\frac{m}{n}$, m şi n fiind numere naturale nenule.

(Dumitru Acu)

Clasa a VII-a

1. Trei dintre unghiurile exterioare ale unui triunghi sunt direct proporţionale cu numerele $4\frac{1}{2}$, 6, respectiv $7\frac{1}{2}$. Să se arate că triunghiul este dreptunghic.

(GM)

2. Aflaţi toate numerele naturale x cu proprietatea că: $\frac{2x^2+1}{3x+2} \in \mathrm{N}$.

(Rodica Coman)

3. Arătaţi că pentru orice $b \in \mathrm{Z}$ şi orice p număr prim, numărul $\frac{b^2+1}{p^2-1}$ nu este numar întreg.

(Dumitru Acu)

Clasa a VIII-a

1. Dacă $a, b, c \in (0\,;\, +\infty)$, să se demonstreze echivalenţa:

$$\frac{a(b+c)}{a+b} + \frac{c(a+b)}{b+c} = a+c \Leftrightarrow a = c$$

(G.M).

2. a) Să se arate că pentru orice x real pozitiv are loc egalitatea:

$$\frac{1}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

b) Demonstraţi inegalitatea:

$$\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{6}+6\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{119\sqrt{120}+120\sqrt{119}} > \frac{5}{11}$$

(Dumitru Barac)

3. Fie *ABCD* un romb, iar *M, N, P* şi *Q* mijloacele laturilor [*AB*], [*BC*], [*CD*] şi, respectiv, [*AD*].

a) Stabiliţi natura patrulaterului *MNPQ.*

b) Dacă $E \in [NQ]$ astfel încât $NE = \frac{1}{4}NQ$, $ME \cap NP = \{F\}$, $FP = 8$ cm şi $m(\angle BAD) = 60^0$, calculaţi $\mathscr{A}_{ABCD}$.

(Monica Sas)

Clasa a IX-a

1. Fie $ABCD$ un paralelogram în care notăm cu O intersecţia diagonalelor şi cu M mijlocul segmentului AO. Ştim că $BD = 2AO$, $AC = 2a$, $m(\angle ADB) = 60^\circ$. Pe perpendiculara în M pe planul (ABC) se ia punctul P astfel încât $MP = a$.
i) Să se calculeze distanţele de la punctul P la laturile paralelogramului.
ii) Să se afle distanţa de la punctul M la planul (BCP).

(G.M.)

2. Demonstraţi că dacă $a_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1,n}$, $a_{n+1} = a_1$, atunci

$$a_1(a_1 + a_2) + a_2(a_2 + a_3) + \ldots + a_{n-1}(a_{n-1} + a_n) + a_n(a_n + a_{n+1}) \geq 0.$$

Când are loc semnul egal?

(Rodica Coman)

3. Dacă pentru numerele reale a_1, a_2, a_3, a_4 există x pozitiv astfel încât să fie verificate inegalităţile:

$$xa_1 - (2x+1)a_2 + (x+1)a_3 \geq 0$$
$$xa_2 - (2x+1)a_3 + (x+1)a_4 \geq 0$$
$$xa_3 - (2x+1)a_4 + (x+1)a_1 \geq 0$$
$$xa_4 - (2x+1)a_1 + (x+1)a_2 \geq 0,$$

atunci numerele a_1, a_2, a_3, a_4 sunt egale.

(Dumitru Acu)

Clasa a X-a

1. Fie a un număr natural par nenul şi numerele naturale $n \geq k \geq 1$.
Să se arate că numărul $a^{a^n + k} + 1$ este compus.

(G.M.)

2. Să se arate că: $5\cos x + 5\cos y - \cos(x + y) \leq 9$, $\forall\, x, y \in \mathbf{R}$.

(Dumitru Barac)

3. Fie $a \in (1;\infty)$ şi n un număr natural dat, $n \geq 2$. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n \\ a^{x_1^2} + a^{x_2^2} + \ldots + a^{x_n^2} = na \end{cases}$$

(Nicolae Sanda)

Clasa a XI-a

1. Fie $k \geq 2$ un număr întreg. Pentru ce numere naturale nenule n avem $[\sqrt[k]{n}] \mid n$?

(G.M.)

2. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_1 + z_2 + z_3| = a,\ a > 0$.

Calculați $\left|\dfrac{1}{z_1^{2007}} + \dfrac{1}{z_2^{2007}} + \dfrac{1}{z_3^{2007}}\right|$.

(G.M.)

3. Fie b un număr real pozitiv, șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ verifică relația: $ba_{n+1} + b + 1 =$ $= (b + 2)(ba_n + b + 1)^{b+1}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 = \dfrac{1}{b}$. Aflati termenul general a_n.

(Dumitru Acu)

Clasa a XII-a

1. Se consideră o mulţime A de numere reale care satisface simultan proprietăţile:
1) $0 \in A$; **2)** $x \in A \Rightarrow 2^x + 3^x \in A$; **3)** $x^2 + x^3 \in A \Rightarrow x \in A$.

Să se arate că:
a) mulţimea A este nemărginită.
b) mulţimea A conţine cel puţin două numere strict pozitive subunitare.

(G.M.)

2. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln n!\right)^{\frac{1}{n!}}$.

(Petru Ivănescu)

3. Determinaţi $X \in M_2(\mathbf{C})$ ştiind că are suma elementelor egală cu 2, iar

$$X^{2008} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

(Rodica Coman)

Clasa a V-a

1. Suma a patru numere naturale este 2009. Arătați că cel puțin unul dintre ele este mai mare sau egal cu 503.

(G.M. 6/2009)

2. Să se determine numerele $\overline{abc}$, scrise în baza de numerație 10, astfel încât: $\overline{abc} = a + b + c + \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} + \overline{ba} + \overline{cb} + \overline{ac}$.
(Se acceptă și numere de forma $\overline{0x} = x$).

(Dumitru Acu)

3. Fie numerele $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2009$, $y = 1 + 9 + 17 + ... + 2009$ și $z = 2010 \cdot 5^3 + 2010 + 2010^0$. Să se afle:
a) resturile împărțirilor lui *x,* respectiv, *y* la 2010;
b) restul împărțirii lui $t = x + z$ la *y*.

(Rodica Coman)

Clasa a VI-a

1. Aflați numerele naturale *a*, *b*, *c* cu $a < b \le c$ astfel încât:

$$2^a + 2^b + 2^c \cdot 5^b = 2009.$$

(G.M. 6/2009)

2. Numerele naturale *a*, *b*, *c* verifică condițiile:
i) $3a + 13b + 8c$ se divide cu 23;
ii) $a + b + c$ se divide cu 23.
Demonstrați că $4a + 18b + 11c$ se divide cu 23.

(Nastasia Chiciudean)

3. Fie $A_0, A_1, A_2, ..., A_{2010}$ situate în această ordine pe o dreaptă, astfel încât: $A_0A_1 = A_1A_2 = 1$ *cm* și $A_kA_{k+1} = 2A_{k-1}A_k$, pentru orice $k \in \{2, 3, ..., 2009\}$.
a) Să se arate că punctul A_4 este mijlocul segmentului $[A_0A_5]$.
b) Să se calculeze lungimea segmentului $[A_0A_{2010}]$.

(Lucreția Checec)

Clasa a VII-a

1. Se dă triunghiul isoscel ABC $\left(\left(AB\right)\equiv\left(AC\right)\right)$ cu $m(\sphericalangle A)=40^0$. Fie F simetricul lui B față de AC, $[AD$ bisectoarea unghiului BAC, $D\in\left(BC\right)$, $\left\{E\right\}=BF\cap AC$ și $\left\{P\right\}=AD\cap CF$. Arătați că:

a) Triunghiul ACF este isoscel;

b) $DE \parallel CP$;

c) $m\left(\sphericalangle APC\right)=50^0$. ***(G.M. 6/2009)***

2. Arătați că pentru oricare x, y, z numere naturale, numărul $9^x+9^y+9^z$ nu este pătrat perfect.

(Mugur Acu)

3. Fie p un număr prim impar și fie a, b, c numere naturale cu $a<b<c<p$ astfel încât a^2, b^2, c^2 să dea același rest la împărțirea cu p. Arătați că p divide $a + b + c$.

(Dumitru Acu)

Clasa a VIII-a

1. Fie N un număr natural astfel încât 9N se scrie ca o sumă de două pătrate perfecte. Arătați că 10N are aceeași proprietate.

(G.M. 5/2009)

2. Fie $k\in\left[-2,2\right]$. Să se arate că dacă $a > 0$ și $b > 0$, cu $a \leq b$ atunci

$$\frac{a^2-kab+(k+1)b^2}{a^2+b^2}\leq\frac{\max(a,b)}{a}.$$

(Dumitru Acu)

3. Fie ABC un triunghi isoscel cu $m(\sphericalangle BAC)=120^0$ iar M și N două puncte pe latura BC astfel încât $MN^2=BM^2-BM\cdot NC+NC^2$.

Să se arate că $m(\sphericalangle MAN)=60^0$.

(Dumitru Barac)

Clasa a IX-a

1. Șapte din vârfurile unui cub sunt etichetate cu cifra zero, iar vârful al optulea este etichetat cu cifra 1. Avem o succesiune finită de pași, fiecare pas constând în adunarea lui 1 la capetele unei muchii. Să se arate că, la sfârșit, cel mai mare divizor comun al celor 8 numere din vârfurile cubului este 1.

(G.M. 6/2009)

2. Să se rezolve în $\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}$ sistemul: $\begin{cases} x^2-4\sqrt{3x-2}+6=y \\ y^2-4\sqrt{3y-2}+6=x \end{cases}$.

(Nastasia Chiciudean)

3. Arătați că oricare ar fi numerele pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$, $n\in \mathrm{N}^*$, cu $\sum_{i=1}^{n} a_i=1$ avem: $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2 \geq \frac{\left(n^2+1\right)^2}{n}$.

(Monica Sas)

Clasa a X-a

1. Fie a, b, c, d numere reale cu proprietatea $\{a, b\}\neq\{c, d\}$. Să se arate că ecuația $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{x+c}+\sqrt{x+d}$ are cel mult o soluție reală.

(G.M. 5/2009)

2. Dacă $x, y, z\in(0,1)$, să se arate că:

a) $\log_x(yz)+\log_y(zx)+\log_z(xy)\geq 6$;

b) $\log_x^2(yz)\cdot\log_y^2(xz)+\log_y^2(zx)\cdot\log_z^2(yx)+\log_x^2(zy)\cdot\log_z^2(xy)\geq 48$.

(Rodica Coman)

3. Arătați că pentru oricare $m > 0$ în orice triunghi ABC are loc inegalitatea $m\cdot(\sin A+\sin C)-\cos B\leq\frac{m^2+2}{2}$. Studiați cazul de egalitate.

(Dumitru Acu)

Clasa a XI-a

1. Fie *ABCD* un tetraedru înscris în sfera de rază R, cu proprietatea că $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=8$, oricare ar fi *M* un punct al sferei.

a) Să se calculeze R.

b) Să se arate că segmentele *AB , AC , AD* pot fi laturile unui triunghi.

(G.M. 3/2009)

2. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ două șiruri de numere reale astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n=0$.

Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2 y_n-x_n y_n^2+y_n^3}{x_n^2+x_n y_n+y_n^2}$.

(Dumitru Acu)

3. i) Să se verifice egalitatea $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ii) Să se arate că

$$(3a+b+c)(3b+c+a)(3c+a+b)\geq(4a+c)(4b+a)(4c+b)$$

pentru oricare *a*, *b*, *c* numere pozitive.

(Dumitru Barac)

Clasa a XII-a

1. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{m}\ln\left(1+a_k^n\right)\ln\left(1+\frac{b_k}{n}\right)$, unde $a_1, a_2, ..., a_m > 1$ și $b_1, b_2, ..., b_m > 0$.

(G.M. 5/2009)

2. Să se determine primitivele funcției $f:\Re\to\Re$, $f(x)=\frac{x^2(x^4-16)}{(x^4+16)^{5/2}}$.

(Nicolae Sanda)

3. Folosind faptul că $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$ să se demonstreze inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}+\frac{1}{3(n+1)^3}\angle\frac{\pi^4}{90}$$

pentru orice $n\in\mathrm{N}^*$.

(Emil C. Popa)

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MATEMATICA, DE DRAG“
EDIŢIA A V-A, 19-21 NOIEMBRIE 2010

Clasa a V-a

1. La un campionat de fotbal, Andrei, Mihai și Vasile au marcat împreună 22 de goluri. Andrei a marcat de trei ori mai multe goluri decât Vasile, iar Mihai jumătate din numărul golurilor marcate de Andrei. Câte goluri a marcat fiecare?

(G.M. 6/2010)

2. Să se determine numerele naturale $\overline{abc}$, scrise în baza 10, astfel încât

$$\overline{abc} = \overline{cba} + \overline{ab} + \overline{ba} + \overline{ca} + \overline{ac} + \overline{bc} + \overline{cb}.$$

(Dumitru Acu)

3. Există 5 numere naturale *a, b, c, d* și *e* cu proprietatea că suma a oricăror patru dintre ele dă restul 1 prin împărțirea la 4?

(Monica Sas)

Clasa a VI-a

1. Determinați toate numerele naturale nenule care împărțite la 17 dau câtul egal cu restul și împărțite la 23 dau, de asemenea, câtul egal cu restul.

(G.M. 7-8-9, 2010)

2. Determinați *m, n* numere naturale astfel încât $2^m - 2^n = 120$.

(Nastasia Chiciudean)

3. Arătați că numărul $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009 \cdot 2010 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2009} + \frac{1}{2010}\right)$ este natural și se divide cu 2011.

(Monica Sas)

Clasa a VII-a

1. În triunghiul *ABC*, *M* este mijlocul înălțimii *AD* ($D \in (BC)$), iar $E \in (AC)$ astfel încât $EC = 2AE$. Arătați că punctele *B, M , E* sunt coliniare dacă și numai dacă $[AB] \equiv [AC]$.

(G.M. 7-8-9/2010)

2. Să se determine $a, b \in \mathrm{N}$ știind că 1997 împărțit la *a* dă restul $2b - a$ și împărțit la *b* dă restul $2a - 10$.

(Nastasia Chiciudean)

3. Dacă *x, y, z, t* sunt numere reale, atunci

$$(-x+y+z+t)^2+(x-y+z+t)^2+(x+y-z+t)^2+(x+y+z-t)^2+\frac{1}{4}\geq x+y+z+t.$$

Precizați cazul de egalitate.

(Dumitru Acu)

Clasa a VIII-a

1. Fie patrulaterul inscriptibil *ABCD*. Dacă $AC\cap BD=\{O\}$, $E\in(OC)$ și $F\in(BD)$, să se demonstreze că $EF \parallel AB$ dacă și numai dacă $\sphericalangle ADE\equiv\sphericalangle BCF$.

(G.M. 6/2010)

2. Demonstrați că pentru orice *n* număr natural are loc inegalitatea

$$\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}<\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}.$$

(Lucreția Checec)

3. Fie *a* și *n* două numere naturale nenule. Arătați că numărul

$$x_n(a)=1+a+a^2+a^3+\ldots+a^{12n-1}$$

se divide prin $(a+1)(a^2+1)(a^8+a^4+1)$. ***(Dumitru Acu)***

Clasa a IX-a

1. Fie $a\in\Re^*$ cu $|a|\neq1$. Determinați funcția $f:\Re\to\Re$ care are proprietatea $f(1-x)+af(1+x)=(a+1)x^2+2(a-1)x+2(a+1)$, pentru orice *x*, număr real.

(G.M. 6/2010)

2. Dacă $x, y, z\in(0,\infty)$ să se arate că:

$$(x+2y)^4+(y+2z)^4+(z+2x)^4\geq 3(x+y+z)^4.$$ ***(Nastasia Chiciudean)***

3. Fie *ABCD* un patrulater și punctele *M, N, P, Q* astfel încât: $\overrightarrow{MB}=-\alpha\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{NB}=-\alpha\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{PC}=-\alpha\overrightarrow{PD}$ și $\overrightarrow{QA}=-\alpha\overrightarrow{QD}$, $\alpha\in\Re, \alpha>0$. Să se arate că:

$$\left|\overrightarrow{MP}\right|+\left|\overrightarrow{QN}\right|\leq\frac{1}{\alpha+1}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|+\alpha\left|\overrightarrow{CD}\right|+\alpha\left|\overrightarrow{AD}\right|\right).$$

(Vasile Negrușeri)

Clasa a X-a

1. Fie $x, y>0$ și $n\in N^*$. Să se arate că:

$$1+\frac{(x+y)^1}{x+y}+\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}+\ldots+\frac{(x+y)^n}{x^n+y^n}\leq 2^n.$$ ***(G.M. 7-8-9/2010)***

2. Să se determine mulțimea perechilor $(a, b) \in \Re \times \Re$ cu proprietatea

$$\max_{x\in[-1,1]}(ax^2 + bx - 1) = 1.$$

(Dumitru Barac)

3. Arătați că nu există p prim așa încât $3^p + 19(p-1)$ să fie pătrat perfect.

(Dumitru Acu)

Clasa a XI-a

1. Fie *a, b, c* numere complexe. Considerăm $S_n = a^n + b^n + c^n$ și

$$A_n = \begin{pmatrix} S_{n+2} & S_{n+1} & S_n \\ S_{n+3} & S_{n+2} & S_{n+1} \\ S_{n+4} & S_{n+3} & S_{n+2} \end{pmatrix}, \text{ unde } n \in \mathrm{N}^*.$$

Să se arate că: $\det(A_n) = -(abc)^n (b-a)^2 (c-a)^2 (c-b)^2$.

(G.M. 1/2010)

2. Demonstrați că în orice triunghi ascuțitunghic are loc inegalitatea:

$$(a+b)\sqrt{\sin 2C} + (b+c)\sqrt{\sin 2A} + (c+a)\sqrt{\sin 2B} \le 6\sqrt{2S}.$$

(Nastasia Chiciudean)

3. Fie $a \in \Re$, $a > 1$ dat. Considerăm șirul $x_0 \in \Re$, $x_{n+1} = x_n + a^{-x_n}$, $n \in \mathrm{N}$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\ln n}$. ***(Dumitru Acu)***

Clasa a XII-a

1. Fie A o matrice de ordinul 2 cu elemente reale și λ_1, λ_2 rădăcinile polinomului $P = \det(A - \lambda I_2)$. Să se arate că:

$$\left(A - \lambda_1 I_2\right)^{2n} + (A - \lambda_2 I_2)^{2n} = (\lambda_1 - \lambda_2)^{2n} I_2,\ n \in \mathrm{N}^*,\ n \ge 1.$$

(G.M. 2/2010)

2. Aflați primitivele funcției $f(x) = \dfrac{(1+e^x)^4}{1+e^{4x}}$, $x \in \Re$. ***(Nicolae Sanda)***

3. Să se arate că $\dfrac{\sqrt[n+2]{(n+2)!} \cdot \sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)^2\,!}} < \sqrt[(n+1)(n+2)]{\dfrac{e}{3}}$, $n = 2, 3, \ldots$.

(Lucian Vințan)

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „MATEMATICA, DE DRAG“ EDIŢIA A VI-A, 18-20 NOIEMBRIE 2011

Clasa a V-a

1. a) Aflați numerele naturale de forma $\overline{ab}$ care împărțite la 36 dau restul un pătrat perfect.
b) În 8 cutii sunt 51 de bile roșii, galbene și albastre. Știind că în fiecare cutie sunt bile de toate culorile, arătați că există cel puțin două cutii care conțin același număr de bile.

(Gazeta Matematică, 5 / 2011)

2. Un elev premiant primeşte la sfârşitul anului şcolar o enciclopedie. El citește în prima zi de vacanță, 18 iunie 2011, primele cinci pagini ale ei. Apoi citește în fiecare zi cu două pagini mai mult decât în ziua precedentă.
a) În ce dată a terminat de citit primul capitol care are 140 de pagini?
b) Știind că a terminat de citit cartea în 17 iulie 2011, aflați câte pagini are aceasta.

(Rodica Coman)

3. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuațiile:
a) $x^{y^z} = 36$;
b) $x^{y^z} + x^{z^y} = 32$.

(Artur Bălăucă , Monica Sas)

Clasa a VI-a

1. Există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $n^2 + 2010$ să fie pătrat perfect?

(G.M. 6/2011)

2. a) Arătați că, printre nouă numere prime mai mari ca 5, există întotdeauna două a căror diferență se divide cu 30 .
b) Să se demonstreze că numărul $a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{12n+11}$, unde $n \in \mathbb{N}$, este divizibil cu 273.

(Nastasia Chiciudean)

3. a) Arătaşi că dacă un număr natural *m*, scris în baza zece, are 2013 divizori naturali, atunci *m* este pătrat perfect.
b) Aflați numerele naturale de trei cifre scrise în baza zece care au 24 de divizori.

(Artur Bălăucă)

Clasa a VII-a

1. a) Să se determinare valorile naturale ale lui n , pentru care fracția $\frac{2n-1}{9n+4}$ se poate simplifica.

b) Arătați că nu există numere naturale nenule *x, y, z* pentru care

$$x^2 + y^2 = 7 \cdot (x, z) \quad \text{și} \quad x^2 + z^2 = 7 \cdot (x, y) .$$

(am notat cu (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor naturale a și b).

(Gazeta Matematică, 5/2011)

2. Rezolvați în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuația:

a) $\sqrt{x^2 - y} = 4 - x^2$.

b) Să se afle $n \in \mathbb{N}^*$, știind că fractiile: $\frac{n+1}{3n^2+2n}$ și $\frac{10}{261}$ sunt echivalente.

(Rodica Coman)

3. Se consideră paralelogramul *ABCD* și punctele *E, F, O, M, P*, și *N* astfel încât : $E \in (AB)$, $F \in (AB)$, $AE = FB = \frac{AB}{4}$, $\{O\} = AC \cap BD$; $DE \cap FC = \{M\}$, $MO \cap AB = \{P\}$; $DP \cap MB = \{N\}$ și $AB = 12$ cm.

a) Aflați lungimea segmentului (PE).

b) Arătați că patrulaterul *MNOE* este paralelogram.

c) Dacă $BC = AM = \frac{AB}{2}$, arătați că dreptele *BD* și *BC* sunt perpendiculare, iar triunghiul *NOE* este echilateral.

(Artur Bălăucă, Nicolae Sanda)

Clasa a VIII-a

1. Fie *x, y* numere raționale nenule. Arătați că dacă $\frac{x\sqrt{5}+y\sqrt{3}}{y\sqrt{5}+x\sqrt{3}}$ este număr rațional atunci $|x| = |y|$.

(Gazeta Matematica, 5/2011)

2. a) Să se determinare numerele naturale n , pătrate perfecte pentru care

$$1 + 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot (2^{2^n} + 1) < 2^{2011} .$$

(Maria Sas)

b) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x^{4^n} + y^{4^n} = 2011$, unde $n \in \mathbb{N}$.

(***)

3. Fie cubul *ABCDA'B'C'D'* și punctele *M* și *N* proiecțiile punctului *A* pe bisectoarea unghiului *ABD'* și, respectiv pe bisectoarea unghiului *AB'D'*. Arătați că:

a) $MN \perp AC$;

b) Dreptele *AA'* și *MN* sunt necoplanare;

c) Câte plane egal depărtate de punctele *M, N, A* și *A'* există? Justificați.

(Artur Bălăucă , Nicolae Sanda)

Clasa a IX-a

1. Fie *ABCDA'B'C'D'* un paralipiped dreptunghic în care $(A'BC) \perp (BC'D)$ și $(A'B'C) \perp (ABC')$. Arătați că *ABCDA'B'C'D'* este cub.

(G.M. 4/2011)

2. Dacă *x* este un număr real, atunci $\sqrt{7-x^2}$ și $\sqrt[5]{7-x^5}$ nu sunt ambele raționale. ***(Dumitru Acu)***

3. Dacă $a, b, x, y, z, t \in \mathbb{R}$ şi $x + y + z + t = u$, atunci

$$(au + bx)^2 + (au + by)^2 + (au + bz)^2 + (au + bt)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{4a+b}{2}u.$$

(D.M. Bătinețu și Nicolae Sanda)

Clasa a X-a

1. Considerăm numerele complexe $z_1, z_2, ..., z_n$, Re $z_k > 0$, Im $z_k > 0$ pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Să se arate că $|z_1 + z_2 \ldots + z_n| \geq \frac{1}{2}(|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|)$.

(G.M. 6/2011)

2. Să se arate că pentru orice *n* natural, $n \geq 2$, avem că:

$A \sin a_1x \cdot \sin a_2x \cdot \ldots \cdot \sin a_nx + B \cos a_1x \cdot \cos a_2x \cdot \ldots \cdot \cos a_nx \leq \max\{|A|, |B|\}$

unde $a_1, a_2, \ldots a_n$, A, B, *x* sunt numere reale arbitrare.

(Ancuța Mititean)

3. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty))$, arătați că ecuația

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i + a_{i+1}x} = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_{i+1} - a_i x}$$

cu $a_{n+1} = a_1$ are o singura solutie.

(Dumitru Acu.)

Clasa a XI-a

1. Fie șirul $(a_n)_{\geq 0}$ definit prin $a_0 = 0$ și $a_{n+1}^2 = \dfrac{1+2a_n\sqrt{1-a_n^2}}{2a_n\sqrt{1-a_n^2}+2-a_n^2}$, $a_n \geq 0$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se determine a_n, $n \geq 0$, n oarecare, și limita șirului.

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care $|a_n - 1| \leq \dfrac{1}{2011}$.

(Constantin Tarnu)

2. Fie $a \in \mathbb{C}$ și matircea A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$.

Calculați A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

(Vasile Negrușeri)

3. Arătați că orice număr prim p, $p \geq 3$, nu se poate scrie sub forma $x^{2k+1} + y^{2k+1}$, $x, y \in \mathbb{N}$ și $k \in \mathbb{N}^*$.

(Dumitru Acu)

Clasa a XII – a

1. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ și $(a_n)_{n \geqslant 1}$ un șir de numere reale pozitive ce verifică simultan următoarele condiții:

i) $a_1 \in (0, 1)$;

ii) $a_{2n+1}^2 = 2a_{2n-1} - a_{2n-1}^2$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

iii) $a_{2n} = \alpha \dfrac{1-a_{2n-1}}{\sqrt{1-a_{2n+1}}}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

Determinați α astfel încât șirul $(a_n)_{n \geqslant 1}$ să fie convergent.

(Daniela Burtoiu și Liana Agnola)

2. Calculați: $\displaystyle\int \frac{(x^2+2x+3)\sin x}{(x+1)^3}dx$.

(Monica Sas și Vasile Negrușeri)

3. Folosind literele din MATEMATICA CU DRAG, unde în ordine se acordă 0, 1, 2, … etc. în ordinea apariției, determinați dacă matricea 4 x 4 obținută înșirând aceste valori este inversabilă. Există o altă așezare a acestor numere astfel încât matricea să fie singulară?

(Radu Gologan)

Clasa a V-a

1. Arătați că pentru orice număr natural nenul n, numărul 21^n poate fi scris ca o sumă de trei pătrate perfecte.

(G.M. 9/2012, Supliment)

2. a) Aflați suma cifrelor numărului a, unde $a = 2^{4n+1} \cdot 5^{4n+5} - 3$ ($n \in \mathbb{N}$).
b) Determinați cifrele numărului: $x = 100^n - 101^3 \cdot 10^n$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 7$.

(Maria Sas)

3. Fie numerele naturale de trei cifre, scrise în baza zece, cu proprietatea că numărul format din primele două cifre ale lor este de trei ori mai mare decât numărul format din ultimele două cifre ale acestora.

Aflați numerele și arătați că suma cifrelor acestor numere este 13.

(Cătălin Budeanu)

Clasa a VI-a

1. Fie punctele coliniare A_0, A_1, A_2, …, A_n situate pe dreapta d în această ordine astfel încât: $A_0A_1 = 1$ cm, $A_1A_2 = 2$ cm, …, $A_{n-1}A_n = n$ cm.
a) Aflați lungimea segmentului $A_{45}A_{99}$ precum și distanța dintre punctele A_0 și M, unde M este mijlocul segmentului $[A_{45}A_{99}]$.
b) Aflați numărul n, dacă lungimea segmentului $[A_0A_n]$ este egală cu 861 cm.

(Nicolae Sanda)

2. Numerele naturale nenule a, b, c îndeplinesc simultan condițiile:
i) $a + 2b + 3c = 3000$, **(1)** și $9b + c = 1000$, **(2)**.
ii) a are 16 divizori, b are 8 divizori și c are 4 divizori. Să se demonstreze că a are patru cifre, b are trei cifre și c are două cifre.

(G.M. 9/2012, Supliment)

3. Se consideră mulțimea: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{abcde}$, unde a, b, c, d, e sunt cifre distincte pare în baza 10$\}$. Aflați:
a) Cardinalul mulțimii $B = \{x \in A \mid 4 \text{ divide } x\}$.
b) Mulțimea $A \cap C$, unde $C = \{x \in A \mid x = t^2, t \in \mathbb{N}\}$.

(Artur Bălăucă)

Clasa a VII-a

1. Aflați cardinalul mulțimii $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \middle/ x = \frac{n^2+21n}{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 1 \right\}$.

(G.M. 9/2012, Supliment)

2. Numim număr „drag“ un număr natural care are exact 4 divizori naturali.

a) Dați un exemplu de trei numere „dragi“ consecutive.

b) Să se arate că nu există trei numere „dragi“ consecutive astfel încât primul dintre ele să fie par.

(Cătălin Budeanu)

3. Se consideră patrulaterul convex *ABCD*, astfel încât $AB = AC = AD = CD$ și $m(\sphericalangle ABC) = 80°$. Pe latura *AB* se ia punctul *E*, cu $m(\sphericalangle CEB) = 30°$.

Arătați că dreptele *DE* și *BC* sunt paralele.

(Artur Bălăucă)

Clasa a VIII-a

1. Rezolvați ecuația: $\frac{x^3+1}{9}+\frac{x^3+2}{10}+\frac{x^3+3}{11}+...+\frac{x^3+1012}{1020} = 1012$.

(G.M. 9/2012, Supliment)

2. Se dă suma: $S_n = 1 + \frac{a_1}{1-a_1}+\frac{a_2}{(1-a_1)(1-a_2)}+...+\frac{a_n}{(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot...\cdot(1-a_n)}$,

unde $a_i \in \mathbb{Z}\setminus\{1\}$, $i = \overline{1,n}$.

Determinați numerele întregi a_i, $i = \overline{1,n}$ pentru care S este număr natural.

(Nastasia Chicindean)

3. Fie *A*, *B*, *C*, *D* patru puncte necoplanare, punctul *M* este mijlocul segmentului (*BC*), iar punctele *P*, *Q*, *R*, *S*, *R'* și *S'* astfel încât $P \in (AM)$, $Q \in (DM)$, $BP \cap AC = \{R\}$, $CP \cap AB = \{S\}$, $BQ \cap CD = \{R'\}$ și $QC \cap BD = \{S'\}$.

a) Dacă punctele *P* și *Q* sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ΔABC și, respectiv, ΔBCD, arătați că dreapta *PQ* este paralelă la planul (*ABD*).

b) Demonstrați că dreptele *SS'* și *RR'* sunt coplanare.

(Nicolae Sanda)

Clasa a IX-a

1. Să se determine cea mai mare valoare a numărului real k pentru care $x^4 + x^2y^2 + y^4 \geqslant k(x + y)^4$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

(G.M. 6-7-8/2012)

2. Se consideră triunghiul ABC în care notăm $AB = c$, $AC = b$, M mijlocul lui (BC). Arătați că dacă P este punctul din plan cu $\overrightarrow{AP} = b^2 \cdot \overrightarrow{AB} + c^2 \cdot \overrightarrow{AC}$ atunci $\mathrm{m}\left(\widehat{BAP}\right) = \mathrm{m}\left(\widehat{CAP}\right)$.

(Dumitru Barac)

3. Dacă $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ și $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant k$, atunci

$$a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + \ldots + (2n-1)a_n^2 \geq k^2, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1.$$

(Dumitru Acu)

Clasa a X-a

1. Să se determine termenul general al șirului $(a_n)_{n \geqslant 1}$ știind că

$$a_1 = 1 \ \text{ și } \ 0!a_1 + 1!a_2 + \ldots + (n-1)!a_n = \frac{a_n a_{n+1}(n-1)!n!}{2}$$

oricare ar fi $n \geqslant 1$.

(G.M. 5/2012)

2. Notăm cu l_a lungimea bisectoarei din A, cu h_a lungimea înălțimii din A și cu r raza cercului înscris în ΔABC. Arătați că:

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{h_a}\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{r}\sin\frac{A}{2}.$$

(Ancuța Mititean)

3. i) Arătați că

$$x^3 + y^3 + z^3 - (x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + yz^2 + y^2z) + 3xyz \geqslant 0,$$

$\forall x, y, z \geqslant 0$.

ii) Să se arate că numerele reale a, b satisfac relația:

$$x^3 + y^3 + z^3 - \mathrm{a}(x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + yz^2 + y^2z) + \mathrm{b}xyz \geqslant 0,$$

$\forall x, y, z \geqslant 0$ dacă și numai dacă există $r, s \in [0, \infty)$ astfel încât $a = r - 1$, $b = 3 - 6r + s$.

(Dumitru Barac)

Clasa a XI-a

1. Să se arate că: $A \cdot (A - B) \cdot B = B \cdot (A - B) \cdot A$, pentru orice matrice pătratică de ordin 2 cu urme egale.

(G.M. 1/2012)

2. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ care, pentru m, n numere naturale date, îndeplinesc condițiile:
a) $f(1, 1) = m + n$;
b) $f(x, y + z) = f(x, y) + nz$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$;
c) $f(y + z, x) = f(y, x) + mz$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$;

(Monica Sas)

3. Fie șirul $(a_n)_{n \geqslant 1}$ de numere reale nenule definit prin $a_1 = \frac{1}{6}$ și $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 3(n + 1)(n + 2)$, oricare ar fi $n \geqslant 1$. Să se arate că:

$$a_1a_4 + a_2a_5 + \ldots + a_na_{n+3} \leq \frac{1}{600}.$$

(Dumitru Acu)

Clasa a XII-a

1. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$.

Să se calculeze $f^{(2012)}(0)$.

(G.M. 5/2012)

2. Fie $k \in \mathbb{R}^*$, $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $2kY^2 = YX - XY$. Să se arate că $Y^2 = O_2$.

(***)

3. Fie $k \in \mathbb{R}^*$ și $a < 1$. Calculați:

$$I(a) = \int \frac{\cos^{2k-1} x(\ln a \cdot \cos x + \sin x)}{a^{2kx} + \cos^{2k} x} dx.$$

(Nicolae Sanda)

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MATEMATICA, DE DRAG“
EDIŢIA A VIII-A, 2013

Clasa a V-a

1. Găsiți numerele naturale a și b pentru care: $63a^3 + 78b^2 = 2013$.

(G.M. 5/2013)

2. Se numeşte număr „împerecheat“ un număr natural scris în baza zece care are patru cifre şi este format din două perechi de cifre egale (exemple: 5577, 7755, 5555, 5757, etc.).

a) Găsiți două numere „împerecheate“ care au suma 2011.

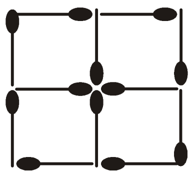
b) Dacă se aşază într-un şir toate numerele „împerecheate“ în ordine crescătoare, aflați primii patru și ultimii patru termeni ai șirului.

c) Câte numere „împerecheate“ există? Justificați răspunsul!

(Cătălin Budeanu)

3. Cu 12 chibrituri construim un pătrat 2×2 care conține $2^2 = 4$ pătrățele mici (ca în figura alăturată).

Câte chibrituri sunt necesare pentru a construi un pătrat 100×100 care să conțină $100^2 = 10000$ de pătrățele mici? Justificați răspunsul!



(Nicolae Sanda)

Clasa a VI-a

1. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuațiile:

a) $5xy + 11z = 55$. ***(Artur Bălăucă)***

b) $\frac{1}{a} + \frac{a}{b} = \frac{7}{6}$. ***(G.M. 5/2013)***

2. Fie șirul de numere naturale 1, 2, 4, 7, 11, 16, … .

a) Determinați următorii trei termeni ai șirului.

b) Precizați dacă numărul 781 este termen al șirului.

3. a) Să se determine numerele naturale $\overline{abc}$ care îndeplinesc condiția: $c^3 + c^2 + c = \overline{abc}$.

b) Aflați numerele naturale a și b știind că $(a + 1)(a^2 + 2a) + b = 213$, iar b este număr prim.

Clasa a VII-a

1. Determinați $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m^m = m! + 232$, unde $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$.

(Gazeta Matematică)

2. Determinați cel mai mic număr rational pozitiv r pentru care numerele $\frac{28}{45} \cdot r$ și $\frac{98}{75} \cdot r$ sunt ambele naturale.

(Rodica Coman)

3. Se consideră punctele fixe B și C, iar punctul A oarecare (variabil) nesituat pe dreapta BC. În exteriorul triunghiului ABC se construiesc triunghiurile dreptunghice isoscele ACE și ABD cu $m(\sphericalangle ADB) = m(\sphericalangle AEC) = 90°$.

Arătați că mediatoarele segmentelor (DE) trec printr-un punct fix (prin același punct).

(Artur Bălăucă)

Clasa a VIII-a

1. a) Fie n un număr natural. Determinați n, dacă $n + 49$ și $n - 49$ sunt cuburi perfecte.

(Gazeta Matematică)

b) Calculați $a = \sqrt{1+2010\sqrt{1+2011 \cdot \sqrt{1+2012 \cdot \sqrt{1+2013 \cdot 2015}}}}$.

(Cătălin Budeanu)

2. Fie numerele reale x, y, z pentru care au loc simultan relațiile:

(i) $x + y + z = -a$ și **(ii)** $xy + yz + zx = \frac{a^2+4a+11}{2}$.

a) Găsiți o relație independentă de „a“ între x, y și z.

b) Stabiliți cărui interval de lungime 2, cu extremitățile numere întregi, aparține fiecare dintre numerele x, y, z.

(Cătălin Budeanu)

3. Prin vârfurile A, B, D și E ale hexagonului regulat $ABCDEF$ se consideră respectiv, dreptele a, b, d și e astfel încât $a \parallel b \parallel d \parallel e \parallel a$. De aceeași parte a planului (ABC) pe dreptele a, b și d se iau respectiv, punctele A', B' și D' astfel încât lungimile segmentelor $[AA']$, $[BB']$ și $[DD']$ exprimate în unități de lungime sunt egale cu: $AA' = 2^{2012} + 2^{2011} + 2^{2010}$, $BB' = 2^{2013}$ și $DD' = 2^{2010}$.

Dacă planul $(A'B'D')$ intersectează dreapta e în punctul E', aflați distanța dintre punctele E și E'.

(Artur Bălăucă)

Clasa a IX-a

1. Se dă piramida patrulateră regulată *TABCD* de volum a, $a > 0$. Să se determine volumul piramidei *TABMN*, unde M și N sunt puncte situate pe TC și, respectiv, TD astfel încât $\frac{MC}{TC} = \frac{ND}{TD} = \frac{1}{3}$.

(G.M. 1/2013)

2. Să se demonstreze că: $\frac{1}{\sqrt{672}} < \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} \cdot ... \cdot \frac{2013}{2014} < \sqrt{\frac{2017}{2688}}$.

(***)

3. Fie $p \in \mathbb{N}$; arătați că numărul $n^4 + (4p + 1)n^2 + 4p^2 + 4p + 3$ nu poate fi scris ca sumă a două numere naturale prime, oricare ar fi numărul natural n.

(Dumitru Acu)

Clasa a X-a

1. Fie x cu proprietatea că numerele $x^3 + x$ și $x^5 + x$ sunt raționale. Să se arate că x este număr rațional.

(G.M. 6-7-8/2013)

2. Pentru orice număr natural k, să se găsească cel mai mic n natural astfel încât $2^k \mid 9^k - 1$.

(***)

3. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$, $n \geq 2$, numere reale pozitive astfel încât $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = n$.

i) Arătați că $a_1 a_2 ... a_n \leq 1$;

ii) $\prod_{i=1}^{n} (a_i^3 + a_i + 1) \leq 3^n$, $\forall\, n \geq 2$. ***(Ancuța Mititean)***

Clasa a XI-a

1. Fie $a_1, a_2, ..., a_n > 0$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se arate că:

$$a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + ... + a_n^{n-1} \geq a_2 a_3 ... a_n + a_1 a_3 ... a_n + a_1 a_2 ... a_{n-1}.$$

Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația:

$$1^{2013x} + 2^{2013x} + ... + 2014^{2013x} = 2014^x \left(1 + \frac{1}{2^x} + ... + \frac{1}{2014^x}\right).$$

(Petre Guțescu)

2. Demonstrați că: $\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 20°} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 40°} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 80°} > 3$.

(Dumitru Barac)

3. Arătați că pentru orice p întreg toți termenii șirului

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_{n+3} = \frac{a_{n+1}a_{n+2} + 2p + 1}{a_n},\ n \geq 1$$

sunt numere întregi.

(Maria Sas)

Clasa a XII-a

1. Considerăm șirul de numere reale $(x_n)_{n \geqslant 1}$ definit prin $x_1 = 1$ $\sin_{n+1} =$ $= \frac{x_n}{n} + \frac{n+1}{n^2}$, $\forall\ n \geqslant 1$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 1$.

(G.M. 9/2013)

2. Calculați: $\int \frac{dx}{\sin x \sin(x+1)\sin(x+2)\sin(x+3)}$, x fiind dintr-un interval în care numitorul nu se anulează.

(Nicolae Sanda)

3. Fie a un număr natural par și nenul. Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ numărul $f_a(n) = a^{2^n} + a^{2^{n-1}} + 1$ are cel puțin n divizori primi diferiți.

(***)

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „MATEMATICA, DE DRAG“ EDIŢIA A IX-A, 21-23 NOIEMBRIE 2014

Clasa a V-a

1. a) Scrieți numărul 100 ca o sumă de patru cuburi perfecte.
b) Scrieți numărul 100^{6p+1} ca o sumă de patru cuburi perfecte, unde p este număr natural.

(Gazeta Matematică)

c) Să se arate că $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2014 \cdot 2015)^2 > 2015^{2015}$.

(Monica Sas)

2. Fie numărul $A = [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + 2012 \cdot 2013 + (2013 \cdot 2014) : 2] :$ $: (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2012^2 + 2013^2)$.
a) Arătați că numărul $B = A + 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2012} + 2^{2013}$ este pătrat perfect.
b) Comparați numerele 100^{310} cu B.

(Monica Sas)

3. Victor are pe aleea dreaptă din fața casei un pavaj cu pavele în formă de pătrate. Fiecare pavelă este împărțită în 9 pătrate egale, iar pe fiecare pătrățel sunt scrise numere naturale după cum urmează:

1	2	3
8	36	4
7	6	5

pavela 1

9	10	11
16	100	12
15	14	13

pavela 2

pavela 3

…
….

pavela n

a) Aflați suma tuturor numerelor scrise pe primele 20 de pavele.
b) Care este numărul scris în centrul pavelei de pe locul al 21-lea?
c) Știind că numărul scris în centrul celei de a n-a pavelă din pavaj este 2020, aflați n.

(Artur Bălăucă)

Clasa a VI-a

1. a) Aflați numerele naturale nenule a căror diferență este egală cu câtul lor.

(Gazeta Matematică)

b) Determinați numerele naturale prime a, b, c astfel încât numărul

$$A = a^4 + b^4 + c^4 - 3$$

să fie prim.

(***)

2. Arătați că numărul $\overline{zxy}$ scris în baza zece este pătrat perfect dacă

$$\frac{xy+1}{xyz+y+z}=\frac{9}{31}.$$

(Artur Bălăucă)

3. Pe dreapta *d* se consideră punctele *A*, *O*, *B* cu $O \in (AB)$. Fie semidreptele $(OC$ și $(OD$ astfel încât $m(\sphericalangle COD) = 70°$. Dacă semidreptele $(OM$ și $(ON$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOD$ și, respectiv, $\sphericalangle AOC$, determinați măsura unghiului $\sphericalangle MON$.

(Nicu Sanda)

Clasa a VII-a

1. a) Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ și *x* pentru care are loc egalitatea:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 2014.$$

(Gazeta Matematică)

b) Arătați că $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2013}+\frac{1}{2014} \notin \mathbb{N}$.

2. a) Dacă $b \in \mathbb{Z}$ și $a \in \mathbb{Q}$, iar inversul numărului $a - b$ este $a + b$, să se arate că $|a| = 1$.

b) Fie șirul de numere naturale 7, 77, 777, 7777, … scrise în baza zece. Să se arate că printre primii 2011 termeni ai șirului există cel puțin unul divizibil cu 2011.

(Nicu Sanda)

3. Se dă triunghiul *ABC* cu $m(\sphericalangle ACB) = 30°$ și $m(\sphericalangle BAC) = 110°$. Pe latura (BC) a triunghiului se consideră punctul *D* astfel încât $m(\sphericalangle DAC) = 50°$.

Arătați că $(AB) \equiv (CD)$.

(Artur Bălăucă)

Clasa a VIII-a

1. a) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x^3 - 3xy + y^3 = 9$.

(Gazeta Matematică)

b) Fie șirul $a_1=\sqrt{a_0^2+1}$, $a_2=\sqrt{a_1^2+1}$, …, $a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+1}$, … oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $a_0 \in \mathbb{N}^*$, a_0 fixat, arătați că șirul conține o infinitate de termeni iraționali.

2. a) Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale prime și distincte două câte două ecuația $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1420$.

b) Câte soluții are ecuația?

(Artur Bălăucă)

3. Se dau trei drepte concurente și necoplanare *a, b, c* care intersectează trei plane paralele α_1, α_2 și α_3.
a) Să se arate că punctele de intersecție ale dreptelor *a, b, c* cu planele α_1, α_2 și α_3 formează în fiecare plan un triunghi, iar cele trei triunghiuri sunt asemenea.
b) Să se arate că centrele cercurilor circumscrise celor trei triunghiuri de la **a)** sunt coliniare.

(Nicu Sanda)

Clasa a IX-a

1. Să se determine numerele naturale a și b astfel încât $E(a, b) = a^2 \cdot 2^{3k-2} + 9b$ să se dividă cu 7, oricare ar fi $k \geq 1$, număr natural.

(G.M. 5/2014)

2. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A cu $AB = 3$ și $AC = 5$ și punctele $R, S \in BC$ astfel încât $\overrightarrow{BR} = \frac{2}{7}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BS} = \frac{4}{9}\overrightarrow{BC}$, apoi $P \in (AR$ și $Q \in (AS$ astfel încât $AP = 2\sqrt{13}$ și $AQ = 10$. Demonstrați că $PQ \perp AB$.

(Romanița și Ioan Ghiță)

3. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} a \cdot [a] + c \cdot \{c\} - [b] \cdot \{b\} = 0,16 \\ 4b \cdot [b] + 4a \cdot \{a\} - 4[c] \cdot \{c\} = 1 \\ c \cdot [c] + b \cdot \{b\} - [a] \cdot \{a\} = 0.49. \end{cases}$
(unde $[x]$, $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv, partea fracționară a numărului real x.)

(Nastasia Chiciudean)

Clasa a X-a

1. Fie numerele reale strict pozitive x și y astfel încât $x^5 + y^5 = x - y$.
Să se arate că $x^4 + 11y^4 < 1$.

(G.M. 3/2014)

2. Pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$ se definesc mulțimile $A_p = \{\cos(pn\sqrt{2}\pi) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
a) Demonstrați că A_p este finită, pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$.
b) Determinați mulțimea $A_{38} \cap A_{53}$.

(Romanița și Ioan Ghiță)

3. Fie a și b numerele reale, iar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x - a)(x - a - b)(x - a - b - 1)(x - a - 2b - 1) + \frac{b^2(b+1)^2}{4} + 1$$

i) Arătați că $f(x) > 0$, pentru orice x real;
ii) Aflați minimul lui f.

(Dumitru Acu)

Clasa a XI-a

1. Să se determine numerele reale *x, y, z, t* pentru care

$$2t+t^2x=x,\ 2x+x^2y=y,\ 2y+y^2z=z,\ 2z+z^2t=t.$$

(G.M. 6-7-8/2014)

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\alpha\end{pmatrix}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $A^n, n\in\mathbb{N}^*$.

b) Să se determine $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^n=\begin{pmatrix}\cos(n\alpha) & \sin(n\beta)\\ -\sin(n\beta) & \cos(n\alpha)\end{pmatrix}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

(Romanița și Ioan Ghiță)

3. Considerăm următoarele $k, k\geq 3,$ șiruri $(x_{1,n})$, $(x_{2,n})$, … , $(x_{k,n})$ care au termenii inițiali pozitivi, iar pentru $n\geq 1$ avem:

$x_{1,n+1}=x_{2,n}+\dfrac{1}{x_{3,n}}$, $x_{1,n+1}=x_{3,n}+\dfrac{1}{x_{4,n}}$,

...

$X_{k-2,n+1}=x_{k-1,n}+\dfrac{1}{x_{k,n}}$, $x_{k-1,n+1}=x_{k-1,n}+\dfrac{1}{x_{1,n}}$, $x_{k,n+1}=x_{1,n}+\dfrac{1}{x_{2,n}}$.

Arătați că:

a) niciunul din șiruri nu este mărginit.

b) cel puțin unul dintre termenii $x_{1,2k^2}, x_{2,2k^2},\dots,x_{k,2k^2}$ este mai mare ca $2k$.

(Dumitru Acu)

Clasa a XII-a

1. Să se determine funcțiile derivabile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care au proprietatea ca funcția $f+3g$ este o primitivă a funcției $2f+g$ și funcția $5f-6g$ este o primitivă a funcției $10f+2g$.

(G.M. 6-7-8/2014)

2. Să se determine primitivele funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3+\dots+x^7)+\frac{x}{1+x}+\frac{2x^2}{1+x^2}+\frac{4x^4}{1+x^4}.$$

(Romanița și Ioan Ghiță)

3. Se consideră matricea $A\in M_2(\mathbb{C})$ cu $\det A=1$. Să se arate că

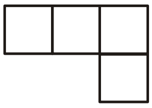
$$\det(A^2+I_2)+\det(A^2+2A-I_2)=8.$$

(***)

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MATEMATICA, DE DRAG“
EDIŢIA A X-A, 21 NOIEMBRIE 2015

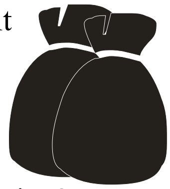
Clasa a V-a

1. Putem pava complet o tablă de dimensiuni 6×6 cu piese de tipul alăturat fără ca piesele să se suprapună sau să iasă în afara tablei? Pătrăţelele piesei au latura 1.



Justificaţi! ***(Gazeta Matematică)***

2. a) Sunt doi saci cu nuci, unul conține 2000 de nuci iar celălalt 2015 nuci.



Ionel și Gigel joacă următorul joc: iau pe rând numai dintr-un sac oricâte nuci consideră. Pierde cel care nu mai are ce lua.

Ce strategie poate aplica Ionel care începe jocul, pentru a câștiga?

Justificați!

b) Comparați numerele: 1999^{1000} cu 1000^{1999}. Justificați!

(Artur Bălăucă)

3. Numerele naturale de patru cifre $\overline{abcd}$ au proprietatea $a \cdot c + b \cdot d = 7$.

Determinați:

a) Câte numere există cu proprietatea dată?
b) Care este cel mai mic număr? Dar cel mai mare?
c) Scrieți numerele care îndeplinesc și condiția $a > b > c > d$. Justificați!

(Artur Bălăuică)

Clasa a VI-a

1. a) Să se determine numerele $\overline{abcd}$ știind că 1998 divide numărul $\overline{dcbadcba}$.

(Nastasia Chiciudean)

b) Stabiliți valoarea logică a propoziției: $[a, b] + (a, b) \geq a + b$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Justificaţi!

2. Un număr natural de patru cifre scris în baza zece de forma $\overline{abcd}$, se numește *util* dacă $\overline{abcd} = d \cdot \overline{ef} \cdot \overline{fe}$, unde numerele d, $\overline{ef}$ și $\overline{fe}$ sunt numere prime.

a) 2015 este număr *util*?
b) Determinați toate numerele *utile*. Justificaţi!

(Artur Bălăucă)

3. a) Există 7 puncte distincte două câte două care să determine exact 10 drepte?
b) Se consideră 12 puncte distincte două câte două din care câteva sunt situate pe dreapta d, iar oricare trei dintre celelalte puncte sunt necoliniare.

Câte puncte se află pe dreapta d, știind că cele 12 puncte determină exact 57 de drepte? Justificați!

(Cătălin Budeanu)

Clasa a VII-a

1. a) Fie a, b, c trei numere naturale impare. Arătați că cel puțin două dintre numerele a^4, b^4, c^4 au suma sau diferența multiplu al lui 10.

(Gazeta Matematică)

b) Se consideră în plan 2016 puncte. Să se arate că există o dreaptă cu proprietatea că în semiplanele determinate de aceasta se află exact câte 1008 puncte.

(Nicu Sanda)

2. Aflați numerele naturale a, b, c pentru care $a! = b! + 5 \cdot c!$
($0! = 1$ și $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ unde $n \in \mathbb{N}^*$).

(Andrei Eckstein)

3. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($(AB) \equiv (AC)$) cu $m(\sphericalangle BAC) = 30°$.

Fie punctul D situat în semiplanul mărginit de dreapta BC care nu conține punctul A, astfel încât $m(\sphericalangle CBD) = 45°$. Pe semidreapta $(BC$ se ia punctul E astfel încât $(BE) \equiv (BD) \equiv (AC)$.

Determinați:
a) măsura unghiului $\sphericalangle CAE$;
b) măsurile unghiurilor patrulaterului $ABDE$. ***(Monica Sas)***

Clasa a VIII-a

1. a) Fie x, y, z numere reale. Arătați că:

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) + 8 \geq 2(x + 1)(y + 1)(z + 1).$$

(Gazeta Matematică)

b) Arătați că $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Se dau mulțimile:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{a^2 - 4ab + b^2}{ab(a+b)};\ a,\ b \in \mathbb{Z}^* \right\} \text{ și}$$

$$B = \left\{ y \in \mathbb{Z} \mid y = \frac{a^3 + b^3}{ab(a-b)};\ a,\ b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Determinați mulțimea $A \cup B$. ***(Artur Bălăucă)***

3. Se consideră patru puncte necoplanare cu proprietatea că $AC + BD = CD$. Fie E intersecția bisectoarei unghiului $\sphericalangle ACD$ cu dreapta AD, K proiecția lui B pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle BDC$ și $\{F\} = CK \cap BD$.

Arătați că $EF \parallel (ABC)$.

(Gazeta Matematică)

Clasa a IX-a

1. Fie punctele M, N, P pe laturile (AB), (BC) respectiv (CA) ale triunghiului ABC şi $R \in (MN)$, $S \in (NP)$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \lambda\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \lambda\overrightarrow{CA}$ şi $\overrightarrow{MR} = (1-\lambda)\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NS} = (1-\lambda)\overrightarrow{NP}$, cu $\lambda \in (0, 1)$. Dreapta RS intersectează laturile (AB) şi (AC) ale triunghiului ABC în punctele E, respectiv F.

Demonstraţi că:

a) RS este paralelă cu BC.

b) $ER = SF$. ***(GMB)***

2. Rezolvaţi ecuaţia $\underbrace{|||\,.\,.\,.\,|}_{2015\text{ ori}}\; x - 1| - 1\,| -1\,| - .\;.\;.\;. -1| = 1$

(Andrei Eckstein)

3. Să se găsească toate numerele reale ce verifică relaţia

$$\{x\} = \{x^2\} = \{x^3\}$$

(Cu $\{a\}$ s-a notat partea fracţionară a numărului real a).

(Radu Gologan)

Clasa a X-a

1. Fie a, b, c numere complexe cu proprietatea că $|a + 2b - 3c| = |a - 4b + 3c|$.

Arătaţi că a, b, c sunt afixele unui triunghi dreptunghic.

(Marius Mainea)

2. Determinaţi numărul funcţiilor $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, crescătoare, cu Card $(\mathrm{Im}\, f) = 2$ şi $f \circ f = f$.

(Radu Gologan)

3. Fie n un număr natural, $n \geqslant 2$. Arătaţi că există o infinitate de n-upluri de numere naturale distincte, având proprietatea că pentru orice $p \in \{2, 3, \ldots, n\}$ orice sumă formată cu p elemente din n – uplu, nu neapărat distincte, divide produsul elementelor mulţimii.

(GMB)

Clasa a XI-a

1. Fie σ o permutare de ordinul *n*, $f(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} |\sigma(k) - k|$.

Calculați S = $\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma)$.

(Marius Mainea)

2. Se consideră şirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ definit prin $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = \sqrt{x_n} + \frac{4}{\sqrt{x_n}}$ pentru $n \geqslant 1$.

a) Arătaţi că şirul este convergent la 4.

b) Arătaţi că $x_4 - 4 < \frac{1}{1000}$.

(Radu Gologan)

3. Fie matricele inversabile $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ care comută şi fie $a > 0$ astfel încât $\det(A^2 - aB^2) > (a \det B - \det A)^2$.

Arătaţi că $\det(AB - B^2) \geqslant 0$.

(GMB)

Clasa a XII-a

1. Fie *F* primitiva funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = e^{x^2}$ cu $F(0) = 0$.

Arătaţi că $F(3) > 225$.

(R. Gologan)

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu element neutru *e,* în care există un element *a* astfel încât $x^{2018} = (ax)^{2016}$ pentru orice $x \in G$. Arătaţi că:

a) $x^2 = e$ pentru orice $x \in G$.

b) *G* este abelian.

(GMB)

3. a) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie ce verifică relaţia $f(x)^{2015} + f(x) - x = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că *f* are primitive.

b) Arătaţi că o funcţie ce verifică relaţia $f(x)^{2015} - f(x) - x = 0$ nu poate avea primitive.

(Vlad Cerbu-Mihai Piticari)