

Amintim mai întâi **teorema fundamentală a aritmeticii**:

Orice număr natural $n > 1$ se reprezintă în mod unic, abstracție făcând de ordinea factorilor, ca un produs de numere prime.

În consecință, orice număr natural $n > 1$ se descompune în mod unic sub forma $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$, unde p_1, p_2, \dots, p_k sunt numere prime, $p_1 < p_2 < \dots < p_k$, cu $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$ (descompunerea canonică a lui n).

Vom utiliza următoarea regulă de bază a analizei combinatorii:

Dacă obiectele x_1, x_2, \dots, x_k pot fi alese, în ordinea scrisă, în m_1, m_2, \dots, m_k moduri, atunci k -uplul (x_1, x_2, \dots, x_k) poate fi ales în $m_1 m_2 \cdot \dots \cdot m_k$ moduri (regula produsului).

Teoremă. Dacă $n > 1$ are descompunerea $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$, atunci

$$d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdot \dots \cdot (a_k + 1), \quad (1)$$

$$S(n) = \frac{p_1^{a_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{a_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{a_k+1} - 1}{p_k - 1}. \quad (2)$$

Demonstrație. Un divizor al lui n are forma $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdot \dots \cdot p_k^{b_k}$, unde $b_i \in \{0, 1, \dots, a_i\}$, $i = \overline{1, k}$. Ca urmare, b_1 poate fi ales în $a_1 + 1$ moduri, b_2 în $a_2 + 1$ moduri, \dots , b_k în $a_k + 1$ moduri. Deci, (b_1, b_2, \dots, b_k) poate fi ales în $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdot \dots \cdot (a_k + 1)$ moduri și relația (1) este dovedită.

Suma divizorilor, în mod evident, coincide cu produsul

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{a_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{a_2}) \cdot \dots \cdot (1 + p_k + p_k^2 + \dots + p_k^{a_k}).$$

Cum acesta este egal cu

$$\frac{p_1^{a_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{a_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{a_k+1} - 1}{p_k - 1},$$

rezultă că pentru $S(n)$ are loc formula (2).

Exemplu. Pentru $72 = 2^3 \cdot 3^2$ avem $d(72) = (3 + 1)(2 + 1) = 12$ și

$$S(72) = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3 - 1} = 195.$$