

Problema Poligon

Andrei-Costin Constantinescu, Oxford University
Bogdan Ciobanu, Universitatea Bucuresti

60 puncte - $O(N^3)$

Notam cu $v[1], v[2], \dots, v[N]$ cele N varfuri ale poligonului, in ordinea in care au fost date.

Se calculeaza programare dinamica $dp[i][j]$ = costul minim pentru a comprima subsecventa de varfuri luate in ordine trigonometrica, incepand cu varful i si terminand cu varful j , astfel incat varfurile i si j sa fie nemiscate. Putem scrie recurenta $dp[i][j]$ = minim dupa k din $dp[i][k] + dp[k][j] + \min(\text{dist}(v[i], v[k]), \text{dist}(v[k], v[j]))$ pentru $i < k < j$. Mai avem ca $dp[i][i + 1] = 0$, iar raspunsul este \min dupa $i \neq j$ din $dp[i][j] + dp[j][i] + \text{dist}(v[i], v[j])$.

100 puncte - $O(N^2)$

Construim un graf neorientat complet cu N noduri astfel incat fiecare varf al poligonului sa reprezinte un nod in graf, iar costul muchiei de la nodul A la nodul B sa fie dat de distanta euclidiană dintre varful A si varful B . Analizand cu atentie modul in care poligonul nostru evolueaza in poligoane mai mici, deducem urmatoarele:

- Toate costurile mutarilor efectuate pe parcursul unei secvente sunt costuri de muchii din graf.
- Nu vom muta niciodata un punct de 2 ori, deci multimea muchiilor asociate diagonalelor corespunzatoare mutarilor efectuate intr-o secventa fixata descrie un arbore partial al grafului.
- Asadar, cum toate secventele de mutari descriu un arbore partial in graf, costul minim nu poate fi mai mic decat costul **Arborelui Partial de Cost Minim (APM)** al grafului;

Acum, observatia cheie este ca intotdeauna va exista o succesiune de $N - 1$ mutari ce descrie exact APM-ul grafului dat. Aceasta observatie nu este intocmai una triviala, asa ca o vom demonstra printr-o serie de leme:

Lema 1 Muchiile APM-ului grafului nu se intersecteaza unele cu celelalte in alte puncte decat, eventual, varfurile acestora.

Demonstratie Presupunem prin absurd ca 2 muchii AB si CD din APM se intersecteaza. Atunci, in cazul de fata, schimbând aceste 2 muchii fie cu AC si BD , fie cu AD si BC , in functie de restul muchiilor APM-ului, am obtine un arbore partial de cost mai mic, contrazicand minimalitatea arborelui de la care am plecat. Detaliile sunt lasate ca tema cititorului.

Lema 2 Pentru orice APM al grafului considerat, exista cel putin 2 laturi ale poligonului cu proprietatea ca:

1. Muchiile asociate lor fac parte din APM.
2. Pentru fiecare dintre ele, nodul asociat cel putin unuia dintre varfuri este o frunza in APM.

Demonstratie Prin inductie, luand in considerare 2 cazuri:

1. APM-ul este un lant, caz in care toate muchiile au asociate laturi ale poligonului, dintre care 2 respecta si conditia de a avea unul din capete frunza in arbore.
2. Exista cel putin o muchie a APM-ului care nu are asociata o latura a poligonului (sa ii numim diagonala asociata diagonala speciala). In acest caz, aplicand ipoteza de inductie pe cele 2 poligoane formate prin taierea poligonului nostru cu diagonala speciala, putem deduce ca exista cel putin 2 muchii cu proprietatile date in poligonul initial.

Teorema 3 Exista o succesiune de mutari care reduc un poligon la un singur punct cu cost asociat exact costul APM-ului grafului asociat.

Demonstratie Inductiv, se alege una dintre cele 2 muchii generate de Lema 2, se reduce poligonul astfel incat varful asociat nodului frunza sa dispara, si se foloseste ipoteza de inductie pe poligonul astfel rezultat.

Nota: Procedul prezentat, de a construi APM-ul si de a tot muta frunze ce au asociate laturi ale poligonului in total lor reprezinta exact metoda de constructie a solutiei.

Pentru implementare se va folosi Algoritmul lui Prim, care implementat fara cozi de prioritati ruleaza in $O(n^2)$ in graf dens.