Clasa a IX-a

Soluții și bareme de corectare

Problema 1. Arătați că, pentru orice numere reale $x, y, z > 0$, are loc inegalitatea:

$$\frac{x+y+2z}{(x+y)^2}+\frac{x+2y+z}{(x+z)^2}+\frac{2x+y+z}{(y+z)^2}\geq 2\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right).$$

Viorel Nicolae, București

Soluție. Arătăm mai întâi că $\frac{x+z}{(x+y)^2}+\frac{x+y}{(x+z)^2}\geq\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}$, (1). **2p**

Aducând la același numitor, inegalitatea (1) este echivalentă cu

$$(x+y)^3+(x+z)^3\geq(x+y)(x+z)(2x+y+z). \qquad (2)$$

Deoarece $(x+y)^3+(x+z)^3=\big((x+y)+(x+z)\big)\big((x+y)^2-(x+y)(x+z)+(x+z)^2\big)=(2x+y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+xz-yz)$, rămâne să arătăm că $x^2+y^2+z^2+xy+xz-yz\geq(x+y)(x+z)$, ceea ce revine la $(y-z)^2\geq 0$, evident. **3p**

Scriind și inegalitățile analoage lui (1) obținute prin permutări circulare, obținem $\frac{y+z}{(y+x)^2}+\frac{y+x}{(y+z)^2}\geq\frac{1}{y+x}+\frac{1}{y+z}$, respectiv $\frac{z+x}{(z+y)^2}+\frac{z+y}{(z+x)^2}\geq\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}$, iar concluzia se obține adunând aceste două inegalități cu inegalitatea (1) **2p**

Problema 2. Fie triunghiul ABC și punctele $A'\in(BC)$, $B'\in(CA)$, $C'\in(AB)$ astfel încât $\frac{A'B}{A'C}=\frac{B'C}{B'A}=\frac{C'A}{C'B}$.

Notăm cu C'', A'', B'' intersecțiile perechilor de drepte (AA', BB'), (BB', CC') și respectiv (CC', AA').

Arătați că centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și $A''B''C''$ coincid.

Petre Simion, București (Gazeta Matematică)

Soluție. Centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și $A''B''C''$ coincid dacă și numai dacă $\overrightarrow{OA''}+\overrightarrow{OB''}+\overrightarrow{OC''}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, de unde $\left(\overrightarrow{OB''}-\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OC''}-\overrightarrow{OA''}\right)+\left(\overrightarrow{OA''}-\overrightarrow{OC}\right)=\overrightarrow{0}$, adică $\overrightarrow{AB''}+\overrightarrow{BC''}+\overrightarrow{CA''}=\overrightarrow{0}$, (1). **1p**

Notăm $\frac{A'B}{A'C}=\frac{B'C}{B'A}=\frac{C'A}{C'B}=k>0$. Din $A'\in(BC)$ și $\frac{A'B}{A'C}=k$, rezultă că $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$, (2). **1p**

Analog, $\overrightarrow{BB'} = \dfrac{1}{k+1}\overrightarrow{BC} + \dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{BA}$, (3), respectiv $\overrightarrow{CC'} = \dfrac{1}{k+1}\overrightarrow{CA} + \dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{CB}$, (4).
.... **1p**

Fie $\dfrac{AB''}{AA'} = x$, $\dfrac{BC''}{BB'} = y$, $\dfrac{CA''}{CC'} = z$, unde $x, y, z > 0$.

Punctele C, B'', C' sunt coliniare, deci vectorii $\overrightarrow{CB''}$ și $\overrightarrow{CC'}$ au coordonatele proporționale la descompunerea în funcție de doi vectori necoliniari dați.

Avem $\overrightarrow{CB''} = \overrightarrow{AB''} - \overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AA''} - \overrightarrow{AC} = \dfrac{x}{k+1}\overrightarrow{AB} + \left(\dfrac{kx}{k+1} - 1\right)\overrightarrow{AC}$ și respectiv $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC} = \dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Din proporționalitatea coordonatelor rezultă că $\dfrac{\frac{x}{k+1}}{\frac{k}{k+1}} = \dfrac{\frac{kx}{k+1} - 1}{-1}$, de unde obținem $x = \dfrac{k(k+1)}{k^2+k+1}$ **2p**

Procedând analog, obținem $y = \dfrac{k(k+1)}{k^2+k+1}$ și $z = \dfrac{k(k+1)}{k^2+k+1}$, deci $x = y = z$. Ținând cont și de relațiile (2), (3) și (4) rezultă:

$$\overrightarrow{AB''} + \overrightarrow{BC''} + \overrightarrow{CA''} = x\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}\right) \overset{(2),(3),(4)}{=\!=\!=} \overrightarrow{0},$$

adică relația (1), ceea ce încheie soluția. **2p**

Problema 3. Fie n un număr natural nenul. Determinați numerele reale x cu proprietatea că

$$x = \frac{[x] + n}{\{x\} + n + 1},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă, iar $\{a\}$ partea fracționară a numărului real a.

***

Soluție. Vom arăta că problema are două soluții: $x_1 = \dfrac{-(n+1) + \sqrt{n^2+6n+1}}{2}$, $x_2 = 1$.

Din enunț avem $x \cdot (n + \{x\} + 1) = x + n - \{x\}$, de unde $x = \dfrac{n - \{x\}}{n + \{x\}}$, (1) **2p**

Cazul I. Dacă $x \in \mathbb{Z}$, avem $\{x\} = 0$, iar din (1) obținem $x = 1$, care este soluție a ecuației din enunț, deoarece $1 \in \mathbb{Z}$. **2p**

Cazul II. Dacă $x \notin \mathbb{Z}$, cum $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $0 < n - \{x\} < n + \{x\}$, deci $0 < \dfrac{n - \{x\}}{n + \{x\}} < 1$, iar din (1) deducem că $0 < x < 1$. **1p**

În consecință, $[x] = 0$ și $\{x\} = x$. Înlocuind în (1) obținem $x = \dfrac{n - x}{n + x}$, de unde $x^2 + (n+1)x - n = 0$, de unde rezultă că $x \in \left\{\dfrac{-(n+1) \pm \sqrt{n^2+6n+1}}{2}\right\}$ **1p**

Cum $0 < x < 1$, convine doar soluția $x_1 = \dfrac{-(n+1) + \sqrt{n^2+6n+1}}{2}$. **1p**

Clasa a X-a

Soluții și bareme de corectare

Problema 1. Fie $n \geqslant 3$ și $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ cu $[a_1] = [a_2] = \ldots = [a_n] = 4$. Arătați că:

$$\log_{a_1}(9a_2 - 20) + \log_{a_2}(9a_3 - 20) + \ldots + \log_{a_{n-1}}(9a_n - 20) + \log_{a_n}(9a_1 - 20) \geqslant 2n.$$

(Cu $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a.)

Florin Rotaru, Focșani (*Gazeta Matematică*)

Soluție. Notăm $a_0 = a_n$. Pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ avem:

$[a_k] = 4 \Leftrightarrow 4 \leqslant a_k < 5 \Leftrightarrow (a_k - 4)(a_k - 5) \leqslant 0 \Leftrightarrow 9a_k - 20 \geqslant a_k^2$. **2p**

Deducem că $\log_{a_{k-1}}(9a_k - 20) \geqslant \log_{a_{k-1}}(a_k^2) = 2\log_{a_{k-1}} a_k$ **2p**

Sumând pentru $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ și folosind inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică, obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} \log_{a_{k-1}}(9a_k - 20) \geqslant 2\sum_{k=1}^{n} \log_{a_{k-1}} a_k \geqslant 2n \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \log_{a_{k-1}} a_k} = 2n \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{\lg a_k}{\lg a_{k-1}}} = 2n$$

.... **3p**

Problema 2. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe distincte două câte două, de module egale cu r. Arătați că există un unic număr complex a pentru care numerele $z_1 + \dfrac{1}{az_1}$, $z_2 + \dfrac{1}{az_2}$ și $z_3 + \dfrac{1}{az_3}$ sunt reale.

***

Soluție. Evident, $a \neq 0$ și $r > 0$. Notăm $s = |a| > 0$. Pentru fiecare $k \in \{1, 2, 3\}$ avem $\overline{z_k} = \dfrac{r^2}{z_k}$ și $z_k + \dfrac{1}{az_k} \in \mathbb{R}$, deci $z_k + \dfrac{1}{az_k} = \overline{z_k} + \dfrac{1}{\overline{a}\ \overline{z_k}} = \dfrac{r^2}{z_k} + \dfrac{az_k}{r^2 s^2}$, de unde obținem $a\left(r^2 s^2 - a\right) \cdot z_k^2 = r^2 s^2 \left(ar^2 - 1\right)$, (1) **3p**

Presupunând $r^2 s^2 - a \neq 0$, rezultă $z_k^2 = \dfrac{r^2 s^2 \left(ar^2 - 1\right)}{a\left(r^2 s^2 - a\right)}$, $k = 1, 2, 3$, de unde se deduce că două dintre numerele z_1, z_2, z_3 sunt egale, contradicție. **2p**

Așadar, $a = r^2 s^2$. Din (1) deducem că $ar^2 = 1$, deci $a = \dfrac{1}{r^2}$ **2p**

Problema 3. Arătați că mulțimea valorilor termenilor șirului

$$x_n = \frac{\sqrt{n+\sqrt{0}} + \sqrt{n+\sqrt{1}} + \ldots + \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}} + \sqrt{n+\sqrt{n^2}}}{\sqrt{n-\sqrt{0}} + \sqrt{n-\sqrt{1}} + \ldots + \sqrt{n-\sqrt{n^2-1}} + \sqrt{n-\sqrt{n^2}}},\ n \in \mathbb{N}^*,$$

este finită.

* * *

Soluție. Notăm:

$$A_n = \sqrt{n+\sqrt{0}} + \sqrt{n+\sqrt{1}} + \ldots + \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}} + \sqrt{n+\sqrt{n^2}},$$

$$B_n = \sqrt{n-\sqrt{0}} + \sqrt{n-\sqrt{1}} + \ldots + \sqrt{n-\sqrt{n^2-1}} + \sqrt{n-\sqrt{n^2}}.$$

Aplicând formula radicalilor compuși, rezultă că, pentru orice $k \in \{0, 1, \ldots, n^2\}$, avem:

$$\sqrt{n \pm \sqrt{k}} = \sqrt{\frac{n+\sqrt{n^2-k}}{2}} \pm \sqrt{\frac{n-\sqrt{n^2-k}}{2}},$$

.... **1p**

Ca urmare, $A_n + B_n = 2\sum\limits_{k=0}^{n^2} \sqrt{\dfrac{n+\sqrt{n^2-k}}{2}} = \sqrt{2} \cdot \sum\limits_{k=0}^{n^2} \sqrt{n+\sqrt{n^2-k}}$ **2p**

Având în vedere că $\{n^2 - k \mid k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n^2\} = \{0, 1, \ldots, n^2\}$, rezultă că $\sum\limits_{k=0}^{n^2} \sqrt{n+\sqrt{n^2-k}} = \sum\limits_{j=0}^{n^2} \sqrt{n+\sqrt{j}} = A_n$ **2p**

În consecință, $A_n + B_n = \sqrt{2} \cdot A_n$, de unde rezultă că $A_n(\sqrt{2}-1) = B_n$, deci $x_n = \dfrac{A_n}{B_n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, mulțimea valorilor termenilor șirului dat este finită, având un singur element, și anume $\sqrt{2}+1$. **2p**