Colegiul Național Liviu Rebreanu - Bistrița
Concursul Interjudețean „Matematica, de drag"
Ediția a XVII-a, Bistrița, 15 - 17 noiembrie 2024

Clasa a XI-a

Soluții și bareme de corectare

Problema 1. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$, definit prin $x_1 > 0$ și $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+2}{2x_n+1}$, pentru orice $n \geqslant 1$.

Arătați că șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent și calculați limita acestuia.

G. René

Soluție. Deoarece $x_1 > 0$, iar din $x_n > 0$ rezultă $x_{n+1} > 0$, inductiv deducem că $x_n > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, (1). **1p**

Se observă că $x_{n+1} - x_n = \dfrac{2 - x_n^2 - x_n}{2x_n+1} = -\dfrac{(x_n-1)(x_n+2)}{2x_n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, (2) **2p**

Deoarece $x_n - 1 = \dfrac{x_{n-1}^2+2}{2x_{n-1}+1} - 1 = \dfrac{(x_{n-1}-1)^2}{2x_{n-1}+1} \geqslant 0$, pentru orice $n \geqslant 2$, din (1) și (2) deducem că șirul $(x_n)_{n\geqslant 2}$ este descrescător. **2p**

Deoarece $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este și mărginit inferior (de 0 – conform (1)), deducem că $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent. Trecând la limită în relația de recurență din enunț, obținem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \{-2, 1\}$ și, cum $x_n > 0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. **2p**

Problema 2. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA$ și $\det(A^2 + AB + B^2) = 0$.

Arătați că $\det A = \det B = -\mathrm{Tr}(AB^*) = \dfrac{1}{3} \cdot \det(A - B)$.

Mihai George, Slatina (*Gazeta Matematică nr. 9/2024*)

Soluție. Știm că $\det(A - xB) = \det A - x\mathrm{Tr}(AB^*) + x^2 \det B$, pentru orice $x \in \mathbb{C}$, (1).
.... **1p**

Notăm $f(x) = \det(A - xB)$, $x \in \mathbb{C}$. Fie $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $\varepsilon^3 = 1$. Deoarece $AB = BA$, rezultă că $A^2 + AB + B^2 = (A - \varepsilon B)(A - \overline{\varepsilon} B)$. **1p**

Din ipoteză rezultă că $\det(A - \varepsilon B) \cdot \det(A - \overline{\varepsilon} B) = 0$, deci $\det(A - \varepsilon B) = 0$ sau $\det(A - \overline{\varepsilon} B) = 0$, adică $f(\varepsilon) = 0$ sau $f(\overline{\varepsilon}) = 0$. **1p**

Este suficient să studiem un singur caz, celălalt fiind analog – de fapt, deoarece $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, rezultă că $\det A, \det B, \mathrm{Tr}(AB^*) \in \mathbb{R}$, deci $f(\overline{\varepsilon}) = \overline{f(\varepsilon)}$, de unde $f(\varepsilon) = f(\overline{\varepsilon}) = 0$.

Din $\det(A - \varepsilon B) = 0$ rezultă $\det A - \varepsilon \mathrm{Tr}(AB^*) + \varepsilon^2 \det B = 0$ și, întrucât $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, deducem că $(\det A - \det B) - \varepsilon(\mathrm{Tr}(AB^*) + \det B) = 0$. Cum $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, rezultă că $\det A - \det B = \mathrm{Tr}(AB^*) + \det B = 0$, deci $\det A = \det B = -\mathrm{Tr}(AB^*)$. **2p**

Atunci, pentru $x = 1$, din (1) rezultă $\det(A - B) = \det A - \mathrm{Tr}(AB^*) + \det B = 3 \det A$, deci $\det A = \det B = -\mathrm{Tr}(AB^*) = \dfrac{1}{3} \cdot \det(A - B)$. **2p**

Problema 3. Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere reale pozitive pentru care există $c>0$ astfel încât

$$x_n^2 \leqslant c\,(x_n - x_{n+1})\,,\quad (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*.$$

a) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$

b) Demonstrați că șirul $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x_k}{k}\right)_{n\geqslant 1}$ este convergent.

Radu Miculescu, București

Soluție. a) Deoarece $x_n - x_{n+1} \geqslant \dfrac{x_n^2}{c} > 0$ pentru orice $n\geqslant 1$, rezultă că șirul este descrescător. **1p**

Fiind mărginit inferior de 0, șirul este convergent. Dacă $l=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, trecând la limită în inegalitatea din enunț obținem $0\leqslant l^2\leqslant c\,(l-l)$, deci $l=0$. **1p**

b) Notăm $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x_k}{k}$, $n\geqslant 1$. Cum

$$s_{n+1}-s_n = \frac{x_{n+1}}{n+1} > 0$$

pentru orice $n\geqslant 1$, rezultă că șirul $(s_n)_{n\geqslant 1}$ este crescător **1p**

Folosind inegalitatea $\dfrac{x_k}{k}\leqslant \dfrac{1}{2}\left(x_k^2+\dfrac{1}{k^2}\right)$ obținem

$$\frac{x_k}{k}\leqslant \frac{c}{2}\,(x_k - x_{k+1}) + \frac{1}{2k^2},\ k\geqslant 1,$$

deci $s_n \leqslant \dfrac{c}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-x_{k+1}) + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{c}{2}\,(x_1 - x_{n+1}) + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$ **2p**

Pentru orice $n\geqslant 2$ avem:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} < 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)\cdot k} = 1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = 2-\frac{1}{n} < 2.$$

În consecință, $s_n < \dfrac{c}{2}\,(x_1 - x_{n+1}) + \dfrac{1}{2}\cdot 2 \leqslant \dfrac{cx_1}{2}+1$, deci șirul $(s_n)_{n\geqslant 1}$ este mărginit superior. Fiind și crescător, șirul $(s_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent. **2p**

Clasa a XII-a

Soluții și bareme de corectare

Problema 1. Fie F primitiva funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \Big|\big||x-1|-1\big|-1\Big|$ cu proprietatea că $F(-1) = 0$.

Calculați $F(3)$.

René G.

Soluție. Funcția f este continuă, deci admite primitive. Explicitând modulele, obținem succesiv:

$$|x-1|-1 = \begin{cases} -x, & x \le 1 \\ x-2, & x > 1 \end{cases} \Rightarrow ||x-1|-1| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \in [0,1] \\ 2-x, & x \in (1,2] \\ x-2, & x > 2 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{2p}$$

$$f(x) = |||x-1|-1|-1| = \begin{cases} -x-1, & x < -1 \\ x+1, & x \in [-1,0] \\ 1-x, & x \in (0,1] \\ x-1, & x \in (1,2) \\ 3-x, & x \in [2,3] \\ x-3, & x \ge 3 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{2p}$$

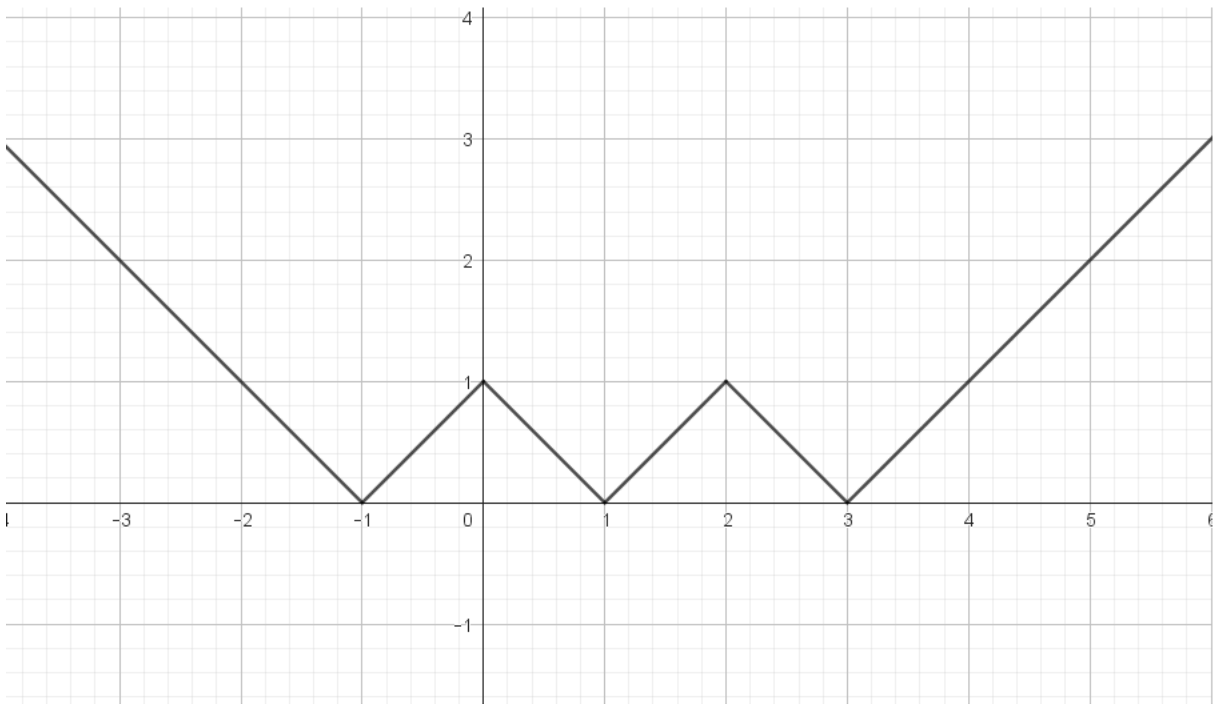
Atunci, orice primitivă F a lui f are forma:

$$F(x) = |||x-1|-1|-1| = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} - x + c_1, & x < -1 \\ \dfrac{x^2}{2} + x + c_2, & x \in [-1,0] \\ x - \dfrac{x^2}{2} + c_3, & x \in (0,1] \\ \dfrac{x^2}{2} - x + c_4, & x \in (1,2) \\ 3x - \dfrac{x^2}{2} + c_5, & x \in [2,3] \\ \dfrac{x^2}{2} - 3x + c_6, & x > 3 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{1p}$$

Din continuitatea lui F și $F(-1) = 0$ obținem $c_1 = -\dfrac{1}{2}$, $c_2 = \dfrac{1}{2}$ **1p**

Succesiv, găsim $c_3 = \frac{1}{2}$, $c_4 = \frac{3}{2}$, $c_5 = -\frac{5}{2}$, $c_6 = \frac{13}{2}$, deci $F(3) = 2$ **1p**

Soluție alternativă Este ușor de schițat graficul funcției f:



Atunci $F(3)-F(-1)$ este egal cu aria suprafeței cuprinse între axa Ox și graficul restricției funcției f la intervalul $[-1,3]$, adică suma ariilor celor două triunghiuri din imagine. Așadar, $F(3) = 2$.

Problema 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup multiplicativ cu elementul neutru e. Dacă $a, b \in G$ verifică relațiile $a^3 = e$ și $a^2ba^{-2} = b^4$, arătați că $b^{63} = e$.

Adina Pop, Baia Mare (*Gazeta Matematică - Supliment nr. 5/2024*)

Soluție. Folosind a doua condiție din ipoteză, deducem relațiile:

$b^8 = b^4 \cdot b^4 \overset{(ip)}{=\!=} (a^2ba^{-2})(a^2ba^{-2}) = a^2b^2a^{-2}$, (1) **2p**

$b^{16} = b^8 \cdot b^8 \overset{(1)}{=\!=} (a^2b^2a^{-2})(a^2b^2a^{-2}) = a^2b^4a^{-2}$, (2) **1p**

$b^{32} = b^{16} \cdot b^{16} \overset{(2)}{=\!=} (a^2b^4a^{-2})(a^2b^4a^{-2}) = a^2b^8a^{-2}$, (3) **1p**

Atunci:

$$\begin{aligned} b^{64} &= b^{32} \cdot b^{32} \overset{(3)}{=\!=} (a^2b^8a^{-2})(a^2b^8a^{-2}) = a^2b^{16}a^{-2} \overset{(2)}{=\!=} a^2(a^2b^4a^{-2})a^{-2} = a^4b^4a^{-4} = \\ &\overset{(ip.)}{=\!=} a^4(a^2ba^{-2})a^{-4} = a^6\,b\,a^{-6} \overset{(ip.)}{=\!=} ebe = b, \end{aligned}$$

iar din $b^{64} = b$ rezultă că $b^{63} = e$ **3p**

Problema 3. Determinați funcțiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea că admit o primitivă F astfel încât:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{F(x) - F(y)}{x-y}, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y.$$

Soluție. Pentru $y = x + 2$, din ipoteză rezultă $F(x+2) - F(x) = 2f(x+1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Prin urmare, $f(x) = \frac{1}{2}(F(x+1) - F(x-1))$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde deducem că f este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$. **1p**

Pentru $x = u + v$ și $y = u - v$ cu $u, v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$, obținem

$$f(u) = \frac{F(u+v) - F(u-v)}{2v},$$

de unde $2vf(u) = F(u+v) - F(u-v)$ pentru orice $u, v \in \mathbb{R}$. **2p**

Derivând de două ori ultima egalitate în raport cu v, obținem $f'(u+v) = f'(u-v)$. De aici, pentru $u = v = \frac{x}{2}$, rezultă că $f'(x) = f'(0) \overset{not}{=} a$, deci $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. **3p**

Se constată imediat că aceste funcții verifică relația din enunț. **1p**